



الوحدة الخامسة

حساب مساحات الأشكال الهندسية



الوحدة الخامسة

حساب مساحات الأشكال الهندسية

الجدارة: 🏆

أن يحسب المتدرب بدقة مساحات الأشكال الهندسية المنتظمة وغير المنتظمة بدقة.

الأهداف: 🎯

1. يتعرف على الأشكال الهندسية وخواصها.
2. يعرف طرق حساب مساحات الأشكال الهندسية المنتظمة.
3. يعرف طرق حساب مساحات الأشكال غير المنتظمة.

الوقت المتوقع للتدريب: 12 ساعة تدريبية 🕒

الوسائل المساعدة: 🛠️

1. سبورة وأقلام سبورة أو جهاز العرض.
2. آلة حاسبة .



6- 1 مقدمة:

تعتبر العمليات الخاصة بحساب المساحات سواء من الخرائط أو من الطبيعة من العمليات الأساسية في عمل المساح. وتتوقف دقة حساب المساحة على دقة القياس. وعلى الرغم من أن أدق الطرق لحساب المساحات هو القياس المباشر من الطبيعة لأطوال وزوايا الشكل المطلوب إيجاد مساحته، إلا أن القياس من الخريطة هو الأكثر شيوعاً عند حساب المساحات وذلك لسهولة القياس من الخريطة رغم ما قد يكون بها من أخطاء بالرسم.

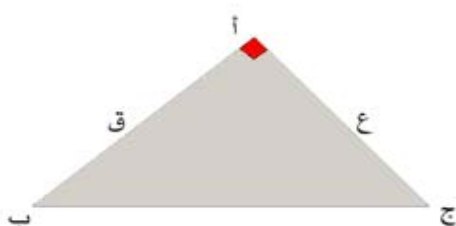
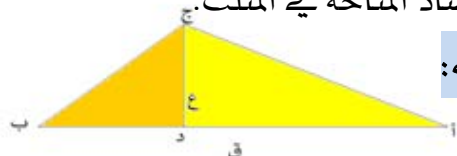
وقد تكون قطع الأراضي أو الأشكال المطلوب تعيين مساحتها على هيئة أشكال هندسية منتظمة أو غير منتظمة الشكل. فالأشكال المنتظمة هي الأشكال البسيطة مثل المثلث، والأشكال الرباعية بأنواعها مثل المربع والمستطيل ومتوازي الأضلاع والمعين وشبه المنحرف وكذلك الدائرة والحلقة والقطاع الدائري والقطاع الناقص. أما الأشكال غير المنتظمة فهي الأشكال ذات الحدود المتعددة والمتعرجة والتي لا يمكن وصفها بشكل هندسي بسيط أو منتظم، وفي هذه الوحدة سنعرض لطرق حساب مساحة كل منها.

5- 2 مساحة الأشكال المنتظمة:

5- 2- 1 مساحة المثلث:

تتوقف طريقة حساب مساحة المثلث على المعلومات والأرصاء المتاحة في المثلث.

أ- مساحة المثلث إذا كان معلوماً طول قاعدته وارتفاعه:



الشكل رقم (5 - 1 أ، ب، ج) يبين أوضاع مختلفة للمثلث.



شكل (١-٥)

وسوف نرمز لقاعدة المثلث بالرمز (ق) وارتفاع المثلث بالرمز (ع).



$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{ق} \times \text{ع}$$

مثال:

قطعة أرض على شكل مثلث تم قياس طول قاعدته فكان = 92.50 وتم قياس طول ارتفاع المثلث فكان 32.60 متراً، احسب مساحة قطعة الأرض.

الحل:

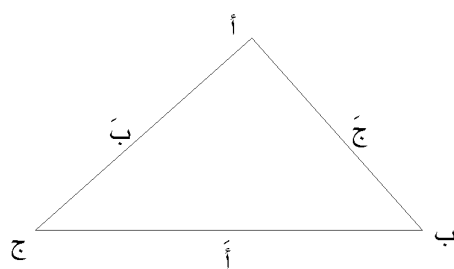
حيث إن قطعة الأرض على شكل مثلث.

$$\therefore \text{مساحة المثلث (م)} = \frac{\text{ق} \times \text{ع}}{2}$$

$$\therefore \text{م} = \frac{32.60 \times 92.50}{2} = 1507.75 \text{ متراً مربعاً}$$

ب- مساحة المثلث إذا كان معلوماً أطوال أضلاعه الثلاثة:

تعتبر هذه الطريقة من أكثر الطرق استخداماً لإيجاد مساحة المثلث في أعمال المساحة العقارية، وبصفة خاصة في حال تعذر قياس الزوايا في المباني حيث تقسم أية قطعة أرض إلى مثلثات غير متداخلة وتقاس أطوال أضلاع كل مثلث. ثم تحسب مساحة المثلث. وبذلك يمكن حساب مساحة أية عقار.



الشكل (5 - 2)

نفرض أن أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث هي أ، ب، ج كما في الشكل (5 - 2)، ويتم حساب مساحة المثلث طبقاً للخطوات التالية:

أولاً: نحسب نصف محيط المثلث (ح) حيث :



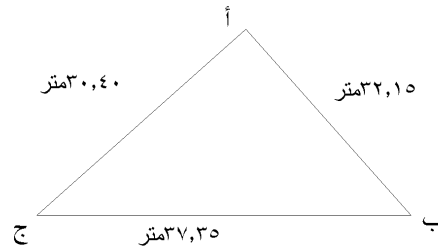
$$ح = \frac{1}{2} \times (أ + ب + ج)$$

ثانياً: نحسب مساحة المثلث (م) باستخدام القانون التالي:

$$م = \sqrt{ح \times (أ - ح) \times (ب - ح) \times (ج - ح)}$$

مثال :

تم قياس أطوال أضلاع قطعة أرض على شكل مثلث فكانت أطوال الأضلاع على النحو التالي، أنظر الشكل (5 - 3) التالي:



الشكل (5 - 3)

أ ب = 32.15 متراً ، ب ج = 37.35 متر، أ ج = 30.40 متراً . احسب مساحة قطعة الأرض.

الحل :

$$\therefore ح = \frac{أ + ب + ج}{2}$$

$$\therefore ح = \frac{32.15 + 30.40 + 37.35}{2} = 49.95 \text{ متر}$$

$$\therefore م = \sqrt{ح (أ - ح) (ب - ح) (ج - ح)}$$

$$\therefore م = \sqrt{49.95 \times (37.35 - 49.95) \times (30.40 - 49.95) \times (32.15 - 49.95)}$$

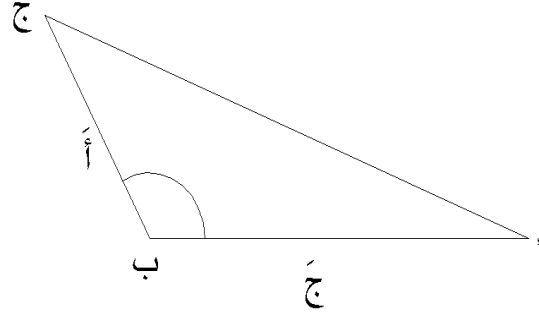
$$\therefore م = \sqrt{49.95 \times 12.60 \times 19.55}$$

$$\therefore م = 467.990^2$$

ج- مساحة المثلث إذا كان معلوماً طول ضلعين والزاوية المحصورة بينهما:



الشكل (5 - 4) يبين مثلثاً معلوماً فيه طول ضلعين والزاوية المحصورة بينهما، وتحسب مساحة المثلث بالتطبيق في القانون التالي:



الشكل (5 - 4)

فإذا علم طولا الضلعين أ ب، ب ج، والزاوية أ ب ج تكون مساحة المثلث:

مساحة المثلث = نصف حاصل ضرب الضلعين المعلومين \times جا الزاوية المحصورة بينهما

$$\therefore \text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times \text{ب ج} \times \text{أ ب} \times \text{جا ب}$$

$$\therefore \text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times \text{أ ج} \times \text{ب ج} \times \text{جا ب}$$

مثال :

قطعة أرض على شكل مثلث تم قياس طول ضلعين من أضلاعها وكذلك تم رصد الزاوية المحصورة بينهما. احسب مساحة قطعة الأرض إذا كانت نتائج القياس كما يلي:

$$\text{طول الضلع أ ب} = \text{ج} = 30.15 \text{ متر}$$

$$\text{طول الضلع ب ج} = \text{أ} = 17.20 \text{ متر}$$

$$\text{زاوية ب} = 65^\circ$$

الحل:

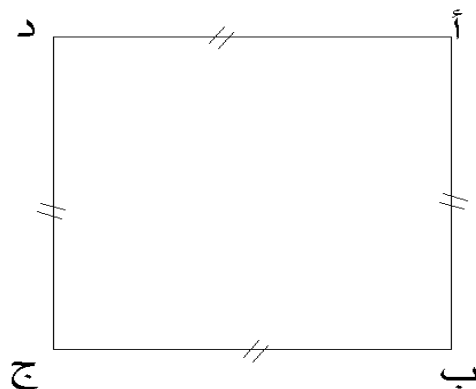
$$\therefore \text{م} = \frac{1}{2} \times \text{حاصل ضرب الضلعين المعلومين} \times \text{جا الزاوية المحصورة بينهما}$$

$$\therefore \text{م} = \frac{1}{2} \times 30.15 \times 17.20 \times \text{جا } 65^\circ = 234.997 \text{ م}^2$$



1. مساحة المربع :

المربع هو شكل رباعي أضلاعه الأربعة متساوية وزواياه الأربعة قوائم وفيه كل ضلعين متقابلين متوازيان، كما في الشكل (5 - 5) :



الشكل (5 - 5)

وتحسب مساحة المربع باستخدام القانون التالي:

$$\text{مساحة المربع} = \text{طول الضلع} \times \text{طول الضلع} \quad \text{أو} \quad \text{مساحة المربع} = \text{طول الضلع}^2$$

=====

مثال :

قطعة أرض على شكل مربع مخصصة لإنشاء مبنى سكني، تم قياس طول ضلعها فكان 25.650 متراً، احسب مساحة قطعة الأرض.

الحل :

$$\therefore \text{مساحة المربع} = \text{طول الضلع} \times \text{طول الضلع}$$

$$\therefore \text{م} = 25.60 \times 25.60 = 655.36 \text{ م}^2$$



2. مساحة المستطيل:

المستطيل له نفس خواص المربع إلا أن فيه كل ضلعين متقابلين متساويين ومتوازيين، كما في الشكل (5 - 6) :



الشكل (5 - 6)

وتحسب مساحة المستطيل بالتطبيق في المعادلة التالية:

$$\text{مساحة المستطيل} = \text{الطول} \times \text{العرض}$$

مثال:

قطعت أرض على شكل مستطيل تم تحديدها وقياس أطوال أضلاعها، فكان طول ضلعها ب ج = 30.20 متراً وعرضها ج د = 17.50 متراً. احسب مساحة قطعة الأرض المستطيلة أ ب ج د.

الحل:

$$\therefore \text{مساحة المستطيل} = \text{الطول} \times \text{العرض}$$

$$\therefore \text{م} = 17.50 \times 30.20 = 529.50 \text{ م}^2$$

3. مساحة المعين :

المعين هو متوازي أضلاع ولكن أضلاعه الأربعة متساوية إلا أنه لا يحتوي على أية زاوية قائمة وقطراه متعامدان وينصف كل منهما الآخر وهما غير متساويين. وتحسب مساحة المعين إما بمعلومية طول ضلعه (القاعدة) وارتفاعه، أو بمعلومية طول القطرين.

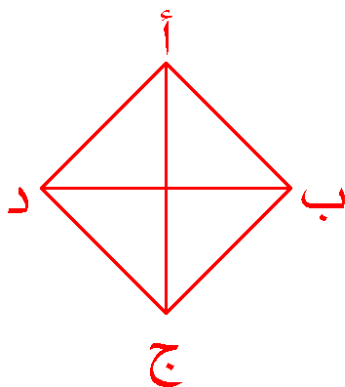
أ. مساحة المعين بمعلومية طول القاعدة والارتفاع شكل (5 - 7 - أ):

ب. مساحة المعين بمعلومية طول القطرين شكل (5 - 7 - ب):

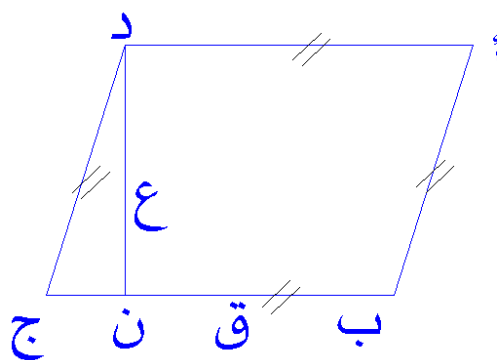


مساحة المعين = طول القاعدة × الارتفاع

مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين



(ب)



(أ)

مساحة الشكل (5 - 7)

مثال 1:

قطعة أرض على شكل معين تم قياس طول قطريها فكانا على الترتيب : 30.20 متراً ، 25.13 متراً. احسب مساحة قطعة الأرض.

الحل:

∴ مساحة المعين = $\frac{1}{2} \times$ حاصل ضرب القطرين

$$\therefore \text{م} = 25.13 \times 30.20 \times \frac{1}{2} = 379.463 \text{ م}^2$$

=====

مثال 2:

قطعة أرض على شكل معين تم قياس طول ضلعه ، وطول ارتفاعه فكانا على الترتيب: 26.18 متراً ، 18.25 متراً. احسب مساحة قطعة الأرض.

الحل:

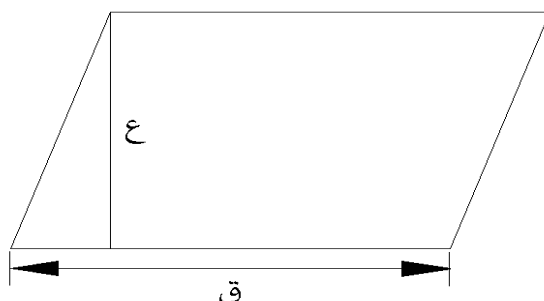
∴ مساحة المعين = طول القاعدة × الارتفاع

$$\therefore \text{م} = 18.25 \times 26.18 = 477.785 \text{ م}^2$$



4. مساحة متوازي الأضلاع:

متوازي الأضلاع هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين كما في الشكل (5 - 8).



الشكل (5- 8)

وتحسب مساحة متوازي الأضلاع بالقانون التالي:

مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة × الارتفاع

مساحة متوازي الأضلاع = ق × ع

مثال:

قطعة أرض على شكل متوازي أضلاع، إذا كان طول قاعدته هو 19.20 متر وطول ارتفاعه = 15.60 متراً. احسب مساحة قطعة الأرض.

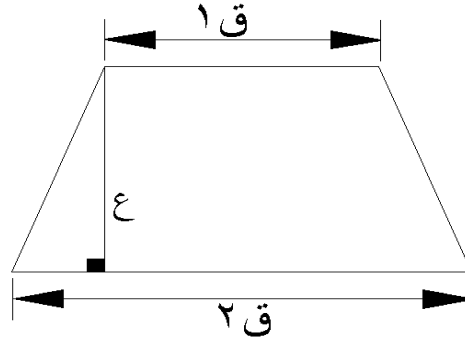
الحل:

• مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة × الارتفاع

• • مساحة متوازي الأضلاع = 15.60 × 19.20 = 299.52 م²

5. مساحة شبه المنحرف:

شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان ولكنهما غير متطابقين ويسمى هذان الضلعان المتوازيان بقاعدتي شبه المنحرف المتوازيين كما في الشكل (5 - 9):



شكل (5- 9)

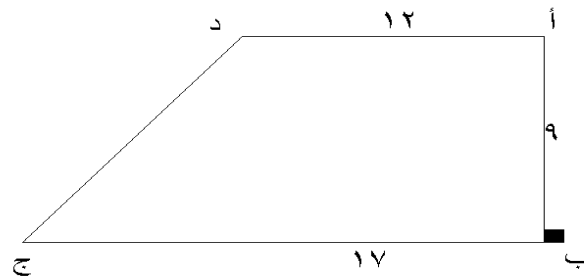
ويتم حساب مساحة شبه المنحرف بالتطبيق في القانون التالي:

$$\text{مساحة شبه المنحرف} = \frac{1}{2} \times \text{مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \frac{1}{2} \times (ق ١ + ٢ ق) \times ع$$

مثال:

قطعة أرض على شكل شبه منحرف (شكل 5- 10) تم قياس قاعدتيه المتوازيتين فكانتا على الترتيب 12 متراً، 17 متراً، وتم قياس المسافة العمودية بين القاعدتين المتوازيتين فكانت 9 متر. فاحسب مساحة شبه المنحرف أ ب ج د.



شكل (5- 10)

الحل:

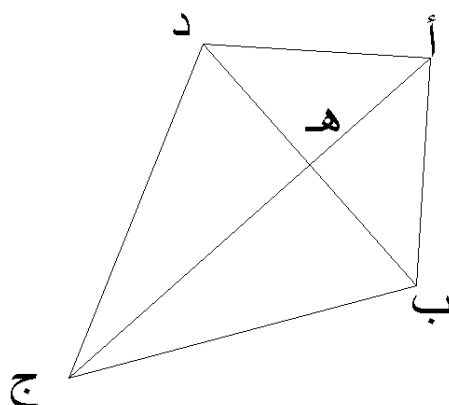
$$\therefore \text{مساحة شبه المنحرف} = \frac{ق ١ + ٢ ق}{2} \times ع$$

$$\therefore \text{مساحة شبه المنحرف} = \frac{(١٧+١٢)}{2} \times ٩ = 130.50 م^2$$



6. مساحة الشكل الرباعي

الشكل الرباعي هو عبارة عن شكل مضلع مقفل يتكون من أربعة أضلاع وأربعة زوايا كما في الشكل (6 - 11):



شكل (6 - 11)

وقد يكون متوازي أضلاع أو معين أو مستطيل أو مربع أو شبه منحرف أو قد لا يكون شكلاً من هذه الأشكال، وفي هذه الحالة تحسب مساحته بدلالة طولي القطرين والزاوية المحصورة بين القطرين كما يلي:

$$\text{مساحة الشكل الرباعي} = \frac{1}{2} \times \text{حاصل ضرب القطرين} \times \text{جا الزاوية المحصورة بين القطرين}$$

مثال:

قطعة أرض على شكل مضلع رباعي فإذا كان طول القطرين 32.60 متراً ، 22.70 متراً وكان مقدار الزاوية المحصورة بينهما 110° احسب مساحة قطعة الأرض.

الحل:

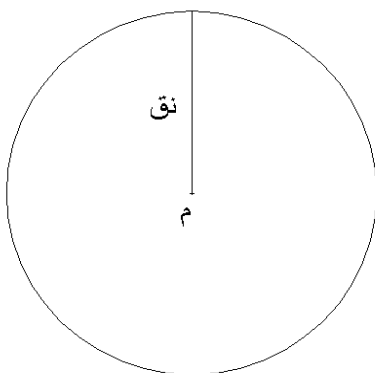
$$\begin{aligned} \therefore \text{مساحة الشكل الرباعي} &= \frac{1}{2} \times \text{حاصل ضرب القطرين} \times \text{جا الزاوية المحصورة بين القطرين} \\ \therefore \text{مساحة الشكل أ ب ج د} &= \frac{1}{2} \times 32.60 \times 22.70 \times \text{جا } 110^\circ = 347.696 \text{ م}^2 \end{aligned}$$



5- 2- 3 مساحة الأشكال الدائرية

1. مساحة الدائرة:

قد تكون قطعة الأرض على شكل دائرة منتظمة مثل حديقة أو ميدان، كما في الشكل (5- 12):



شكل (5- 12)

ولحساب مساحة قطعة الأرض التي تكون على شكل دائرة فإنه يتعين قياس أو حساب نصف قطر هذه الدائرة، ومن ثم يمكن حساب مساحة الدائرة باستخدام القانون التالي:

$$\text{مساحة الدائرة} = \text{ط} \times \text{نق}^2$$

حيث ط : النسبة التقريبية وهي تساوي 3.1415927 ومسجلة في الآلة الحاسبة بالرمز π
نق : نصف قطر الدائرة.

مثال:

حديقة على شكل دائرة نصف قطرها = 15متر ، احسب مساحة هذه الحديقة.

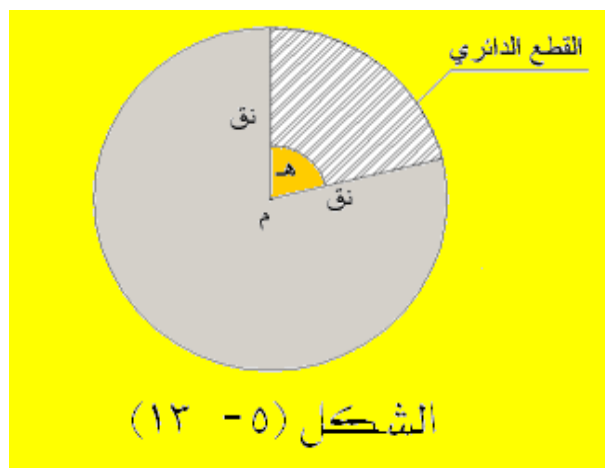
الحل:

$$\begin{aligned} \text{مساحة الحديقة} &= \text{مساحة الدائرة} = \text{ط} \times \text{نق}^2 \\ &= \text{ط} \times 15 \times 15 = 706.858 \text{ م}^2 \end{aligned}$$



2. مساحة القطاع الدائري:

القطاع الدائري هو جزء من سطح الدائرة رأسه هو مركز الدائرة وضلعهما نصف القطرين المتلاقين عند المركز وضلعه الثالث هو جزء من محيط الدائرة، كما في الشكل (5 - 13):



النسبة بين زاوية القطاع إلى مجموع الزوايا حول المركز كالنسبة بين مساحة القطاع إلى مساحة الدائرة أية أن:

$$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\text{هـ}^\circ}{360}$$

$$\therefore \text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{\text{هـ}^\circ}{360} \times \text{مساحة الدائرة}$$

$$\therefore \text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{\text{هـ}^\circ \times \text{ط} \times \text{نق}^2}{360}$$

حيث هـ: الزاوية المركزية للقطاع مقاسة بالدرجات الستينية.

ط: النسبة التقريبية وهي تساوي 3.1415927 ومسجلة في الآلة الحاسبة بالرمز π

نق : نصف قطر الدائرة.

مثال:

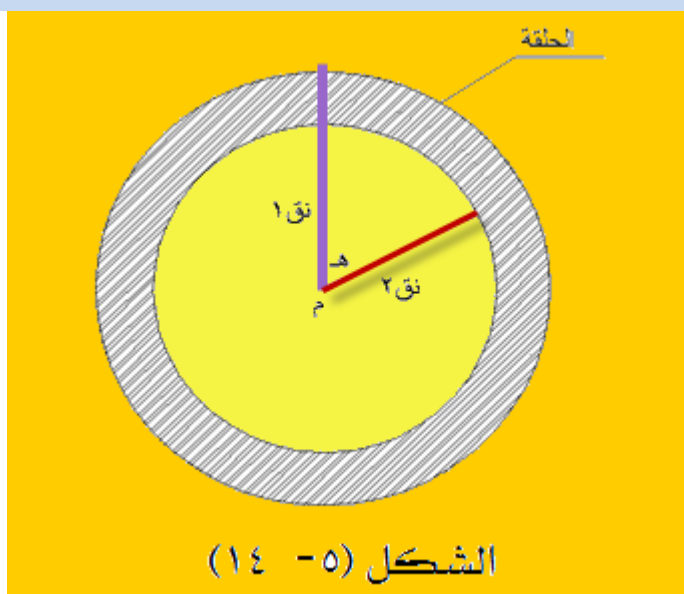
احسب مساحة القطاع الدائري الذي طول ضلعه (نصف قطر الدائرة) = 14 متر وزاويته المركزية = 70°

الحل:

$$\therefore \text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{\text{هـ}^\circ}{360} \times \text{مساحة الدائرة} = \frac{14 \times 14 \times \text{ط} \times 70}{360} = 119.730 \text{ م}^2$$



3. مساحة الحلقة:



الشكل (٥ - ١٤)

الحلقة هي المساحة المحصورة بين دائرتين مختلفتين في نصف القطر ومتحدتين في المركز، انظر الشكل رقم (5 - 14) وعلى ذلك فإن:

مساحة الحلقة = مساحة الدائرة الكبرى - مساحة الدائرة الصغرى

$$= \pi \times \text{نق}_2^2 - \pi \times \text{نق}_1^2$$

$$= \pi (\text{نق}_2^2 - \text{نق}_1^2)$$

$$= \pi (\text{نق}_1 + \text{نق}_2) (\text{نق}_2 - \text{نق}_1)$$

$$= \pi \times \text{ع} \times (\text{نق}_1 + \text{نق}_2)$$

$$\therefore \text{مساحة الحلقة} = \pi \times \text{ع} \times (\text{نق}_1 + \text{نق}_2)$$

حيث :

- ط: النسبة التقريبية وهي تساوي 3.1415927 ومسجلة في الآلة الحاسبة بالرمز π
- (نق1 ، نق2) : نصف قطر الدائرتين .
- ع: مقدار الفرق بين نصفي قطري الدائرتين (ع = نق2 - نق1).

مثال:

دائرتان متحدتان في المركز أنصاف أقطارهما هي 20 ، 15 متر احسب مساحة الحلقة.

الحل:

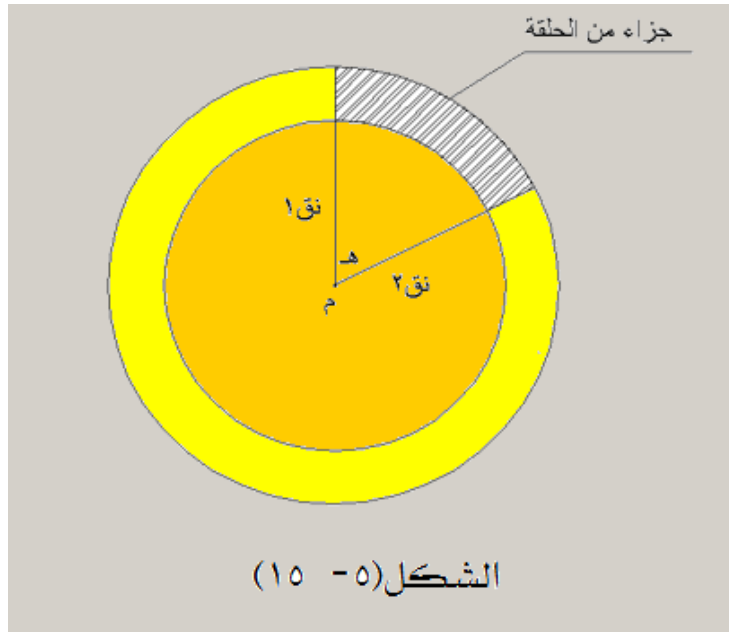


الفرق بين نصفي القطرين = ع = نق الكبرى - نق الصغرى = 20 - 15 = 5 متر،
نق₁ + نق₂ = 15 + 20 = 35 متر

∴ مساحة الحلقة = ط × ع × (نق₁ + نق₂)

∴ مساحة الحلقة = ط × 5 × 35 = 549.779 م²

4. مساحة الجزء من الحلقة:



يتحدد الجزء من الحلقة بمقدار الزاوية المركزية المقابلة له عند مركز الدائرة، كما بالشكل رقم (5- 15) أعلاه، وتكون نسبة مساحة جزء الحلقة إلى الحلقة كنسبة زاوية جزء الحلقة إلى مجموع الزوايا حول المركز، وعلى ذلك فإن:

$$\frac{\text{مساحة الجزء من الحلقة}}{\text{مساحة الحلقة}} = \frac{\text{هـ}^\circ}{360}$$

∴ مساحة الجزء من الحلقة = مساحة الحلقة × $\frac{\text{هـ}^\circ}{360}$

$$\text{∴ مساحة الجزء من الحلقة} = ط \times ع \times (نق_1 + نق_2) \times \frac{\text{هـ}^\circ}{360}$$

حيث :

- ط : النسبة التقريبية وهي تساوي 3.1415927 ومسجلة في الآلة الحاسبة بالرمز π
- (نق₁ ، نق₂) : نصف قطر الدائرتين.



ع : مقدار الفرق بين نصفي قطري الدائرتين (ع = نق₂ - نق₁).

مثال:

احسب مساحة الجزء المظلل من الحلقة إذا كان هذا الجزء يقابل زاوية المركز هـ = 60° ونصفا قطرا الدائرتين متحدثي المركز هما 9 ، 12 متر

الحل:

$$ع = نق_2 - نق_1 = 12 - 9 = 3 \text{ متر}$$

$$، نق_1 + نق_2 = 9 + 12 = 21 \text{ متر}$$

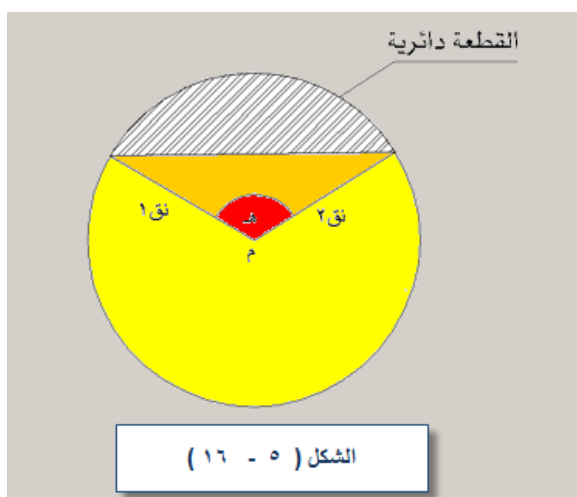
$$\text{مساحة الجزء من الحلقة المقابل للزاوية المركزية } 60^\circ = \frac{هـ}{360} \times \text{مساحة الحلقة}$$

$$\text{مساحة الجزء من الحلقة المقابل للزاوية المركزية } 60^\circ = \frac{هـ}{360} \times ط \times ع (نق_1 + نق_2)$$

$$\text{مساحة الجزء من الحلقة المقابل للزاوية المركزية } 60^\circ = \frac{هـ}{360} \times ط \times 3 \times 21 = 32.987 \text{ م}^2$$

5. مساحة القطعة الدائرية:

القطعة الدائرية هي جزء من دائرة محصورة بين قوس ووتر ماراً بنهايتي ذلك القوس، كما بالشكل رقم (5 - 16) :



$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = \text{مساحة القطاع الدائري} - \text{مساحة المثلث}$$

$$\therefore \text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{نق_2}{360} [(هـ \times ط) - (180 \times جا هـ)]$$

حيث :

ط: النسبة التقريبية وهي تساوي 3.1415927 ومسجلة في الآلة الحاسبة بالرمز

π



▪ (نق) : نصف قطر الدائرة.

مثال:

احسب مساحة القطعة الدائرية التي زاويتها المركزية 50° ونصف قطر الدائرة 14 متر.

الحل:

$$\therefore \text{مساحة القطعة الدائرية} = \left[\frac{\text{نق}^2}{360} (\text{هـ}^\circ \times \text{ط}) - (180 \times \text{جا هـ}) \right]$$

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{14 \times 14}{360} (50 \times \text{ط} - 180 \times \text{جا 50})$$

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = 10.449 \text{ م}^2$$

5- 3 مساحة الأشكال الهندسية غير المنتظمة

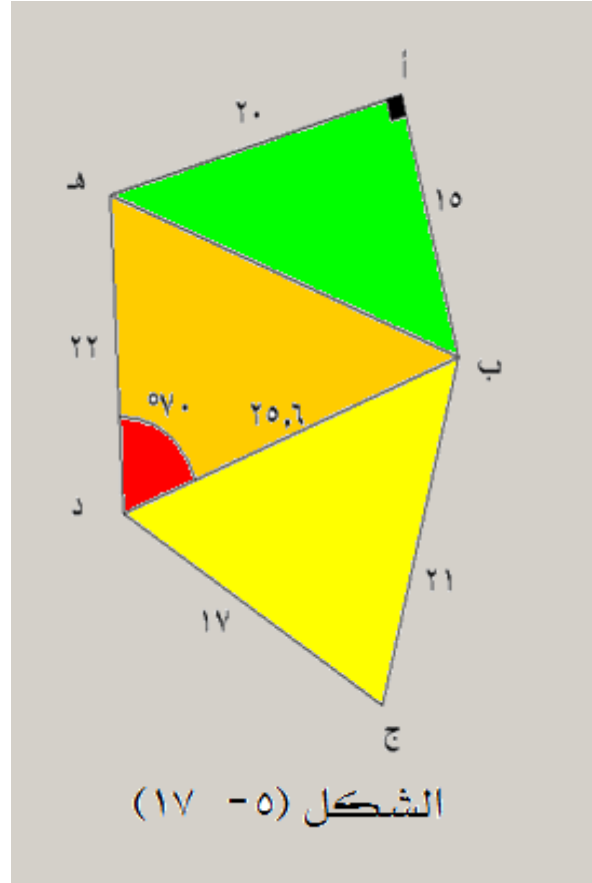
الأشكال الهندسية غير المنتظمة إما أن تكون على شكل مضلع كثير الأضلاع، ولا توجد علاقات تطابق بين الزوايا أو الأضلاع. ولحساب مساحة أية شكل من هذه الأشكال فإننا نلجأ إلى تقسيم المضلع إلى مثلثات غير متداخلة، أما إذا كانت قطعة الأرض ممتدة على شكل شرائح، فإنه يتم تقسيمها إلى أشباه منحرفات.

1. مساحة الأشكال غير المنتظمة بتقسيمها إلى مثلثات:

وذلك باختيار أحد رؤوس المضلع وتوصيل هذا الرأس بكل رؤوس المضلع ثم بقياس جميع الأضلاع يتم حساب مساحة كل مثلث على حدة كما سبق شرحه في البند (5- 2- 1)، ثم يتم تجميع مساحات المثلثات المكونة لهذا الشكل فنتج لدينا المساحة الكلية للشكل.

مثال 1:

الشكل (5- 17) يوضح قطعة أرض محددة بمضلع خماسي أ ب ج د هـ غير منتظم وكانت أطوال أضلاعه 15، 21، 17، 22، 20 متر على الترتيب، وزاوية "أ" قائمة، وزاوية ب د هـ = 70°، وتم رسم الخط ب د وقيس طوله فكان = 25.6 متر. احسب مساحة قطعة الأرض المحددة بهذا المضلع.



الحل:

حيث إن قطعة الأرض محددة بمضلع غير منتظم الشكل، لذلك يتم تقسيمها إلى مثلثات، نحسب مساحة كل منها على حدة، ثم نجمع هذه المساحات لنحصل على المساحة الكلية لقطعة الأرض:

$$1- \text{مساحة المثلث أ ب هـ} = \frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$$

$$\text{مساحة المثلث أ ب هـ} = \frac{15 \times 20}{2} = 150 \text{ م}^2$$

$$2- \text{مساحة المثلث ب د هـ} = \frac{1}{2} \times \text{ب د} \times \text{د هـ} \times \text{جا ب د هـ}$$

$$\text{مساحة المثلث ب د هـ} = \frac{1}{2} \times 25.60 \times 22 \times 70 = 264.617 \text{ م}^2$$

$$3- \text{مساحة المثلث ب ج د} : \text{أولاً نحسب قيمة ح} = \frac{25.6+17+21}{2} = 31.80 \text{ متر}$$

$$\therefore \text{مساحة المثلث ب ج د} = \sqrt{\text{ح} (\text{ب ج} - \text{ح}) (\text{ج د} - \text{ح}) (\text{د ب} - \text{ح})}$$



$$\therefore \text{مساحة المثلث ب ج د} = \sqrt{(25.6 - 31.8)(17 - 31.8)(21 - 31.8) \times 31.8}$$

$$\text{مساحة المثلث ب ج د} = \sqrt{6.2 \times 14.8 \times 10.8 \times 31.8}$$

$$\text{مساحة المثلث ب ج د} = 177.522 \text{ م}^2$$

$$\therefore \text{مساحة الشكل أ ب ج د هـ} =$$

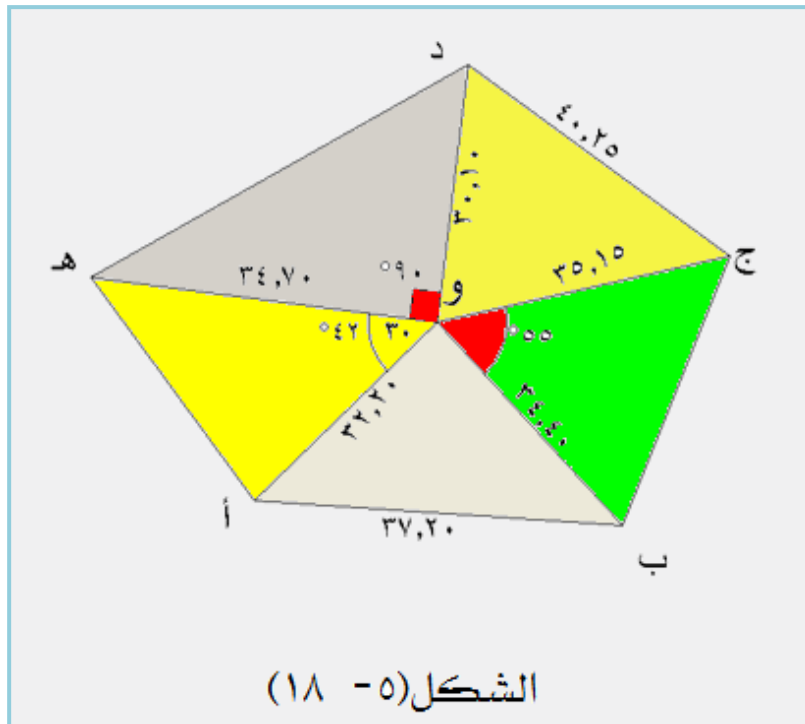
مساحة المثلث أ ب هـ + مساحة المثلث ب د هـ + مساحة المثلث ب ج د

$$\therefore \text{مساحة الشكل أ ب ج د هـ} = 177.522 + 264.617 + 150 = 592.139 \text{ م}^2$$

مثال 2:

احسب مساحة قطعة الأرض أ ب ج د هـ التي قسمت إلى مثلثات:

أ ب و ، ب ج و ، د هـ و ، هـ أ و . وكانت القياسات المأخوذة في هذا الشكل من أطوال وزوايا كما هو مبين بالشكل رقم (5 - 18):



الحل:

مساحة المثلث أ ب و : أولاً نحسب قيمة ح = 32.30 + 34.40 + 37.2 = 51.9 متر



2

$$\sqrt{ح(ح - ب ج)(ح - ج د)(ح - د ب)} = \text{مساحة المثلث أ ب و}$$

$$\sqrt{51.9(32.30 - 51.9)(34.4 - 51.9)(37.2 - 51.9)} = \text{مساحة المثلث أ ب و}$$

$$\sqrt{19.70 \times 17.50 \times 14.7 \times 51.9} = \text{مساحة المثلث أ ب و}$$

$$512.855 \text{ م}^2 = \text{مساحة المثلث أ ب و}$$

$$\frac{1}{2} \times ب د \times د ه \times ج ا ب ه = \text{مساحة المثلث ب ج و}$$

$$\frac{1}{2} \times 34.40 \times 35.15 \times 55^\circ = 495.243 \text{ م}^2 = \text{مساحة المثلث ب ج و}$$

$$\text{مساحة المثلث ج د و} = \text{أولاً نحسب قيمة ح} = \frac{30.10 + 40.25 + 35.15}{2} = 52.75 \text{ متر}$$

$$\sqrt{ح(ح - ب ج)(ح - ج د)(ح - د ب)} = \text{مساحة المثلث ج د و}$$

$$\sqrt{52.75(30.10 - 52.75)(40.25 - 52.75)(35.15 - 52.75)} = \text{مساحة المثلث ج د و}$$

$$\sqrt{22.65 \times 12.50 \times 17.60 \times 52.75} = \text{مساحة المثلث ج د و}$$

$$512.692 \text{ م}^2 = \text{مساحة المثلث ج د و}$$

$$\frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2} = \text{مساحة المثلث ه د و}$$

$$522.235 \text{ م}^2 = \frac{30.10 \times 34.70}{2} = \text{مساحة المثلث ه د و}$$

$$1 = ب د \times د ه \times ج ا ب ه = \text{مساحة المثلث ه أ و}$$



2

$$\text{مساحة المثلث هـ أ و} = \frac{1}{2} \times 34.70 \times 32.20 \times \sin 42^\circ 30' = 377.432 \text{ م}^2$$

∴ المساحة الكلية للأرض = مساحة المثلث أ ب و + مساحة المثلث ب ج و + مساحة المثلث ج د و

+ مساحة المثلث هـ د و + مساحة المثلث هـ أ و

$$\text{المساحة الكلية للأرض} = 377.432 + 522.235 + 512.692 + 495.243 + 512.855$$

$$\text{المساحة الكلية للأرض} = 2420.457 \text{ م}^2$$

2. مساحة الأشكال غير المنتظمة بتقسيمها إلى أشباه منحرفات :

إذا كانت قطعة الأرض المطلوب إيجاد مساحتها أحد حدودها متعرج والحد الآخر مستقيم أو كل من حديها متعرج الشكل فإن قطعة الأرض تقسم إلى مجموعة من أشباه المنحرفات ونحسب مساحة كل شبه منحرف على حدة، ثم نجمع مساحات أشباه المنحرفات فنحصل على المساحة الكلية لقطعة الأرض.

مثال 1:

قطعة أرض أحد حدودها متعرج الشكل والحد الآخر مستقيم أسقطت أعمدة من النقاط أ ، ب ، ج ، د ، هـ على الحد المستقيم وكانت أطوالها كما يلي:

أ أ = 15.00 م ، ب ب = 12.00 م ، ج ج = 19.00 م ، د د = 14.00 م ، هـ هـ = 10.00 م

وكانت المسافات بين الأعمدة على خط القاعدة كما يلي :

أ ب = 23.00 م ، ب ج = 27.00 م ، ج د = 23.00 م ، د هـ = 28.00 م.

احسب مساحة هذه القطعة.

الحل

$$\text{مساحة شبه المنحرف رقم 1} = 23.00 \times \frac{12.00 + 15.00}{2} = 310.50 \text{ م}^2$$

$$\text{مساحة شبه المنحرف رقم 2} = 27.00 \times \frac{19.00 + 12.00}{2} = 418.50 \text{ م}^2$$

$$\text{مساحة شبه المنحرف رقم 3} = 23.00 \times \frac{14.00 + 19.00}{2} = 379.50 \text{ م}^2$$

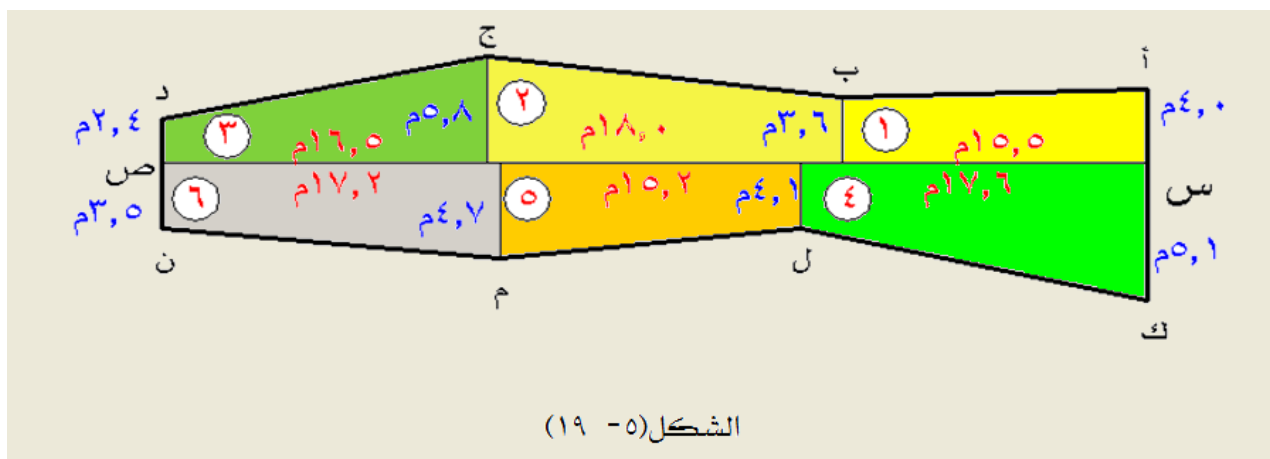
$$\text{مساحة شبه المنحرف رقم 4} = 28.00 \times \frac{10.00 + 14.00}{2} = 336.00 \text{ م}^2$$

$$\text{المساحة الكلية لقطعة الأرض} = 336.00 + 379.50 + 418.50 + 310.50 = 1444.50 \text{ م}^2$$



مثال 2:

المطلوب إيجاد مساحة قطعة الأرض المحصورة بين الحدين المتعرجين أ ب ج د ، ك ل م ن
علماً بأن خط القاعدة س ص أخذ داخل قطعة الأرض وأسقطت الأعمدة عليه وكانت
أطوالها كما هو موضح بالشكل رقم (5- 19)



الشكل (5- 19)

الحل

$$\text{مساحة شبه المنحرف رقم 1} = 15.5 \times \frac{4.0 + 3.6}{2} = 58.90 \text{ م}^2$$

$$\text{مساحة شبه المنحرف رقم 2} = 18.0 \times \frac{3.6 + 5.8}{2} = 84.60 \text{ م}^2$$

$$\text{مساحة شبه المنحرف رقم 3} = 16.5 \times \frac{5.8 + 2.4}{2} = 67.65 \text{ م}^2$$

$$\text{مساحة شبه المنحرف رقم 4} = 17.6 \times \frac{5.1 + 4.1}{2} = 80.96 \text{ م}^2$$

$$\text{مساحة شبه المنحرف رقم 5} = 15.2 \times \frac{4.1 + 4.7}{2} = 66.88 \text{ م}^2$$

$$\text{مساحة شبه المنحرف رقم 6} = 17.2 \times \frac{4.7 + 3.5}{2} = 70.52 \text{ م}^2$$

$$\text{المساحة الكلية لقطعة الأرض} = 58.90 + 84.60 + 67.65 + 80.96 + 66.88 + 70.52 = 429.51 \text{ م}^2$$

$$= 429.51 \text{ م}^2$$

تمارين

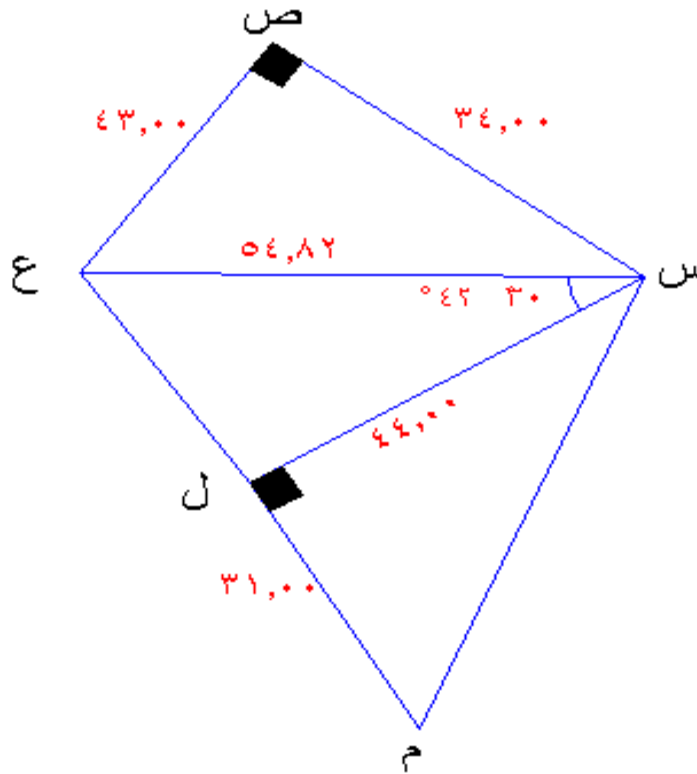
1. قطعة أرض على شكل مثلث أ ب ج تم قياس طول القاعدة أ ب والارتفاع أ ج فكانا على الترتيب 15.20 متراً ، 4.15 متراً. فاحسب مساحة قطعة الأرض.



2. مساحة موقف سيارات على شكل مثلث ، تم قياس أطوال أضلاعه الثلاثة فكانت قيمها 12.10 متر ، 15.10 متر ، 14.80 متر . احسب مساحة هذه الساحة.
3. تم تسوية قطعة أرض على شكل مثلث ، وتم قياس طول ضلعين متجاورين فكانا 25.30 متر ، 23.80 متر وكذلك تم قياس مقدار الزاوية المحصورة بينهما فكانت 40° . احسب مساحة قطعة الأرض.
4. قطعة أرض على شكل مربع طول ضلعه = 15.65 م مخصصة لإقامة مبنى سكني عليها . احسب مساحة قطعة الأرض.
5. قطعة أرض على شكل مستطيل طوله 15.60 متر وعرضه 8.40 متر ، احسب مساحة قطعة الأرض.
6. احسب مساحة المعين الذي طول قاعدته = 14.80 وارتفاعه 9.40 م.
7. احسب مساحة المعين الذي طول قطريه 20.15 م ، 15.40 م.
8. احسب مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه طول القاعدة = 8.90 متر ، وكان قياس ارتفاعه 5.40 متر.
9. احسب مساحة شبه المنحرف الذي فيه القاعدة الكبرى = 12.40 م وطول القاعدة الصغرى = 8.80 م وارتفاعه = 5.10 م.
10. احسب مساحة الشكل الرباعي الذي طولاً قطريه = 25.90 م ، 22.10 م والزاوية المحصورة بين القطرين $20^\circ 84'$.
11. قطعة أرض مستصلحة للزراعة على شكل دائرة نصف قطرها 22 متر . احسب مساحتها.
12. احسب مساحة القطاع الدائري الذي طوله (نصف قطر دائرته) = 34 متر ، وزاويته المركزية = 62° .
13. احسب مساحة الحلقة المحصورة داخل دائرتين متحدي المركز وأنصاف أقطارهما 48 متر ، 32 متر.
14. احسب مساحة جزء الحلقة الذي يقابل زاوية مركزية مقدارها 84° ، إذا كان أنصاف أقطار الدائرتين 67 متر ، 58 متر.
15. احسب مساحة القطعة الدائرية التي زاويتها المركزية 42° ، ونصف قطر دائرتها 38 أمتار.
16. احسب مساحة القطع المكافئ الذي طول قاعدته 22 متر ، وارتفاعه 6 متر.



17. احسب مساحة القطع الناقص إذا كان طول محوره الأكبر 28 متر، وطول محوره الأصغر 25 متر.
18. قطعة أرض زراعية على شكل خماسي منتظم، تم قياس طول ضلعها فكان 14 متر. احسب مساحة قطعة الأرض.
19. قطعة أرض زراعية على شكل مسدس منتظم طول ضلعها 16.50 متر. احسب مساحتها.
20. قطعة أرض زراعية على شكل مثنى منتظم، تم قياس طول ضلعها فكان 15 متر. احسب مساحة قطعة الأرض.
21. س ص ع ل م قطعة أرض قسمت إلى مثلثات شكل رقم (5- 20) وكانت أطوالها كما هي بالشكل احسب مساحة كل مثلث على حدة ، ثم احسب المساحة الكلية لقطعة الأرض :

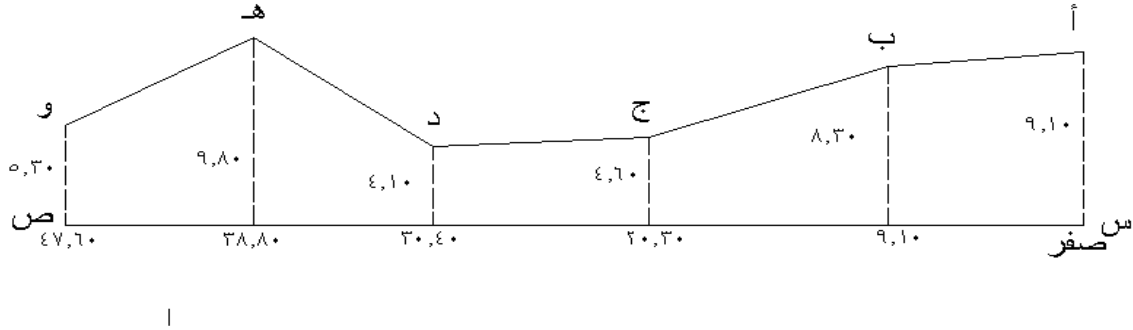


الشكل (5- 20)

22. أ ب ج د هـ و حد متعرج ، س ص حد مستقيم أسقطت أعمده من النقاط أ ، ب ، ج ، د ، هـ ، و ، على الحد المستقيم فكانت أطوالها كما بالشكل (5- 21) وأخذت

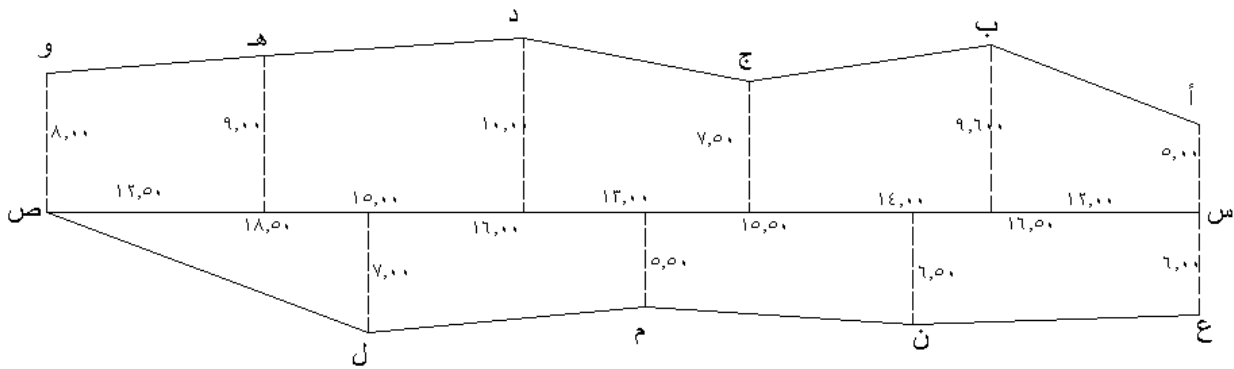


القياسات بين مواقع الأعمدة على خط القاعدة فكانت كما بالشكل المطلوب إيجاد مساحة قطعة الأرض المحصورة بين الحد المتعرج أ ب ج د هـ و، والحد المستقيم س ص.



الشكل (5- 21)

23. المطلوب إيجاد مساحة قطعة الأرض المحصورة بين الحدين المتعرجين أ ب ج د هـ ، ع ن م ل ص علماً بأن خط القاعدة س ص أخذ داخل قطعة الأرض وأسقطت الأعمدة عليه وكانت أطوالها كما هو موضح بالشكل رقم (5- 22)

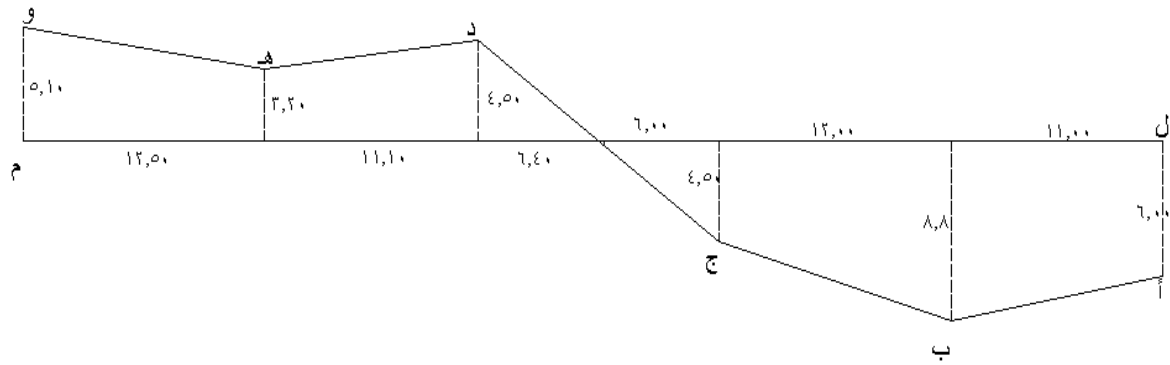


الشكل (5- 22)

24. احسب مساحة قطعة الأرض المحصورة بين الحد المتعرج أ ب ج د هـ و



والحد المستقيم ل م إذا كانت القياسات على خط القاعدة وأطوال الأعمدة كما هو بالشكل (5- 23) :



الشكل (5- 23)



امتحان ذاتي

أجب على الأسئلة التالية ثم تأكد من صحة إجابتك بالنظر إلى الحل في نهاية الوحدة.
السؤال الأول: ضع علامة (✓) أمام العبارات الصحيحة فيما يلي وعلامة (×) أمام العبارات غير الصحيحة فيما يلي:

- 1- المثلث من الأشكال الهندسية المنتظمة () .
- 2- تتوقف طريقة حساب مساحة المثلث على الأرصاد والمعلومات المتاحة في المثلث () .
- 3- يمكن حساب مساحة المعين بمعرفة طول القطرين أو طولي القاعدة والارتفاع () .
- 4- مساحة الشكل السداسي المنتظم $= 1.5 \times \text{ل}^2 \times \text{جا } 30^\circ$ () .

السؤال الثاني:

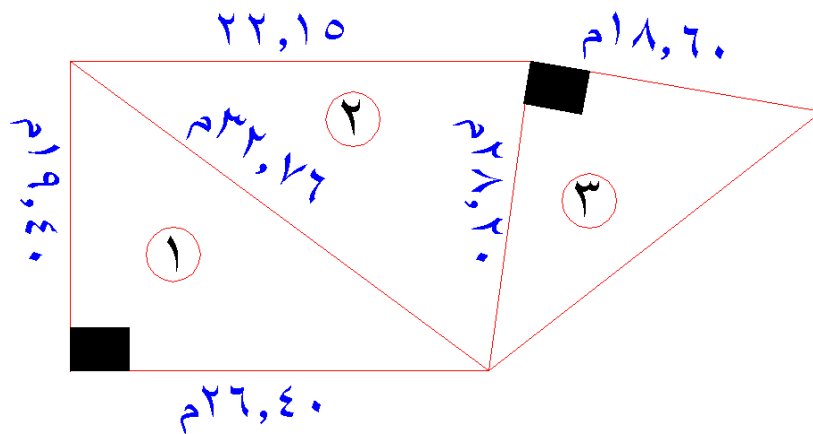
احسب مساحة شبه المنحرف الذي فيه القاعدة الكبرى = 16.60 م وطول القاعدة الصغرى = 10.80 م وارتفاعه = 8.10 م.

السؤال الثالث:

احسب مساحة القطعة الدائرية التي زاويتها المركزية 42° ، ونصف قطر دائرتها 38 متراً.

السؤال الرابع:

س ص ل م قطعة أرض قسمت إلى مثلثات كما في الشكل التالي وكانت أطوالها كما هي بالشكل احسب مساحة كل مثلث على حدة ، ثم احسب المساحة الكلية لقطعة الأرض.





نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه

يعبأ من قبل المتدرب وذلك بعد التدريب العملي أو أي نشاط يقوم به المتدرب

بعد الانتهاء من التدريب على حساب مساحات الأشكال الهندسية ، قوم نفسك وقدراتك بواسطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة ، وذلك بوضع علامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته ، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.

اسم النشاط التدريبي الذي تم التدريب عليه : حساب مساحات الأشكال الهندسية

م	العناصر	مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)			
		غير قابل للتطبيق	لا	جزئيا	كليا
33.					
34.					
35.					
36.					
37.					
38.					
39.					
40.					

يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البندود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق ، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئيا" فيجب إعادة التدريب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.