الدوائر المنطقية والمعالجات الدقيقة

أنظمة الأعداد

أنظمة الأعداد

١

الوحدة الأولى : أنظمة الأعداد

الجدارة : القدرة على التعرف على أنظمة الأعداد المختلفة.

الأهداف : عندما تكتمل هذه الوحدة تكون لدى المتدرب القدرة على أن:

١. يتعرف على النظام العشري للأعداد.
٢. يتعرف على النظام الثنائي للأعداد.
٣. يعرف النظام السداسي عشر للأعداد.
٤. يستطيع التحويل بين هذه الأنظمة.
٥. يعرف العمليات الحسابية في النظام الثنائي.

مستوى الأداء المطلوب : أن يصل المتدرب إلى إتقان الجدارة ٩٠٪.

الوقت المتوقع للتدرب على الجدارة : ٦ ساعات

الوسائل المساعدة :

- السبورة.
- استخدام برنامج Power point لعرض محاضرات أنظمة الأعداد باستخدام جهاز عرض البيانات.

متطلبات الجدارة :

أن يكون المتدرب ملماً بأساسيات الدوائر الكهربائية ولديه القدرة على التعامل مع النظام العشري للأعداد.

مقدمة Introduction

تستعرض هذه الوحدة النظام الثنائي للأعداد "Binary numbering system" وعلاقته بالأنظمة المختلفة للأعداد كما تتناول هذه الوحدة العمليات الحسابية المختلفة للنظام الثنائي حيث يعتبر من أهم أنظمة الأعداد المستخدمة في الدوائر الإلكترونية الرقمية "Digital Electronic Circuits".

١-١ أنظمة الأعداد Numbers Systems

عند دراستنا لأي نظام عددي سنتناول النقاط الآتية:

١. أساس النظام.
٢. الرموز المستخدمة في النظام.
٣. التحويل من النظام العشري لهذا النظام والعكس.
٤. التحويل من هذا النظام إلى بقية الأنظمة.

١-٢ النظام العشري للأعداد Decimal Numbering System

يطلق على النظام العشري للأعداد اسم نظام الأساس عشرة "10" لأنه يعتمد في تكوينه على عشرة أرقام مختلفة وهي "0,1,2,3,4,5,6,7,8,9". وللنظام العشري خاصية رتبة الرقم أو الوزن المكاني "Positional Weight". فعلى سبيل المثال العدد 128: نجد أن الرقم الأول 8 قيمته ثمانية لأنه يقع في خانة الآحاد (الرتبة الأولى التي وزنها $1=10^0$)، وهو حاصل ضرب الرقم 8 في وزن الرتبة 1، أما الرقم الثاني 2 فقيمته عشرون لأنه يقع في خانة العشرات (الرتبة الثانية ووزنها $10=10^1$) وهو حاصل ضرب الرقم 2 في وزن الرتبة 10، أما الرقم الثالث 1 فقيمته مائة لأنه يقع في خانة المئات (الرتبة الثالثة ووزنها $100=10^2$) وهو حاصل ضرب الرقم 1 في وزن الرتبة 100. وبجمع هذه القيم ينتج العدد المطلوب كالآتي:

الرقم العشري:	8		2		1	
الرتبة:	الآحاد		العشرات		المئات	
الوزن:	10^0		10^1		10^2	
الوزن×الرقم:	8×10^0	+	2×10^1	+	1×10^2	
قيمة الرقم العشري:	8	+	20	+	100	$= (128)_{10}$

وفي حالة الأعداد الكسرية تمثل رتب الخانات لها بالأس السالب مرتبة من على يمين العلامة العشرية بدءاً من الوزن 10^{-1} كالآتي:

$$\ldots \quad 10^{2} \quad 10^{1} \quad 10^{0} \bullet 10^{-1} \quad 10^{-2} \quad 10^{-3} \quad \ldots$$

العلامة العشرية

(Decimal Point)

١-٣ النظام الثنائي للأعداد Binary Numbering System

يطلق على النظام الثنائي للأعداد اسم نظام الأساس "2" لأنه يعتمد على رقمين اثنين فقط هما "1,0" ورتب الخانات في النظام الثنائي من اليمين إلى اليسار تمثل قوى العدد "2" أي إن:

$$\ldots 2^{4} \quad 2^{3} \quad 2^{2} \quad 2^{1} \quad 2^{0}$$

وعلى ذلك فإن العدد الثنائي $(11001)_2$ يكافئ الرقم $(25)_{10}$ كما يلي:

2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	0	0	1

$$(11001)_2 = (1\times2^4) + (1\times2^3) + (0\times2^2) + (0\times2^1) + (1\times2^0)$$
$$= 16 + 8 + 0 + 0 + 1 = (25)_{10}$$

بعض المصطلحات المستخدمة مع النظام الثنائي:

■ **عدد التشكيلات الثنائية** Number of Binary Combinations:

عدد التشكيلات الثنائية تعني عدد الاحتمالات التي يمكن الحصول عليها من عدد معين من الخانات "Bits". وهناك صيغة رياضية يمكن عن طريقها حساب هذا العدد من التشكيلات N وهو:

$$N = 2^{n} \qquad (1\text{-}1)$$

حيث: n عدد الخانات الثنائية "Bits".

وبالتالي فإذا كان عدد الخانات يساوي "2" فإن عدد التشكيلات الثنائية هو: $N = 2^2 = 4$

وإذا كان عدد الخانات يساوي "3" فإن عدد التشكيلات الثنائية هو: $N = 2^3 = 8$

وإذا كان عدد الخانات يساوي "4" فإن عدد التشكيلات الثنائية هو: $N = 2^4 = 16$

■ **أهمية رتبة الخانة الثنائية** "Bit":

في أي تشكيلة من التشكيلات الثنائية المحتملة لأي عدد من الخانات نجد أن الخانة الأولى في اليمين تحت رتبة 2^0 أي تساوي "1" أو يقال وزنها "1" وأن الخانة الثانية والتي على يسار الأولى تحت رتبة 2^1 أي وزنها "2" والثالثة تحت رتبة 2^2 أي وزنها "4" وهكذا. لذلك يطلق على الخانة الثنائية الأولى، الخانة الأقل وزناً أو الأقل قيمة "Least Significant Bit" وتكتب اختصاراً "LSB" ويطلق على الخانة الثنائية الأخيرة في أقصى اليسار الخانة الأكبر وزناً أو الأعلى قيمة "Most Significant Bit" وتكتب اختصاراً "MSB".

١- ٣- ١ التحويل من العشري إلى الثنائي Decimal-to-Binary Conversion

للتحويل من النظام العشري إلى النظام الثنائي نستخدم طريقة تكرار القسمة على 2 " Repeated Division-by-2 Method".

أولاً: تحويل الأعداد العشرية الصحيحة إلى النظام الثنائي

لتحويل العدد العشري $(14)_{10}$ إلى الثنائي: نبدأ بقسمة العدد 14 على 2، ثم نقسم خارج القسمة الذي نحصل عليه على 2 وهكذا حتى نحصل على خارج قسمة يساوي صفر. في كل خطوة من خطوات القسمة نحصل على باقي خارج القسمة وهو الذي يشكل العدد الثنائي. الباقي الأول الذي نحصل عليه يمثل "LSB" في العدد الثنائي والباقي الأخير يمثل "MSB"، وهذه الخطوات يمكن توضيحها كالآتي:

				خارج القسمة	الباقي
14	÷	2	=	7	0
7	÷	2	=	3	1
3	÷	2	=	1	1
1	÷	2	=	0	1

1 1 1 0

MSB LSB

وعلى ذلك يكون الناتج: $(14)_{10} = (1110)_2$

مثال (١- ١): حول العدد العشري $(25)_{10}$ إلى مكافئه الثنائي.

الحـــــل

خارج القسمة	الباقي	
$25 \div 2 = 12$	1	(LSB)
$12 \div 2 = 6$	0	
$6 \div 2 = 3$	0	
$3 \div 2 = 1$	1	
$1 \div 2 = 0$	1	(MSB)

وبالتالي يكون الناتج كما يلي:

$$(25)_{10} = (11001)_2$$

مثال (١- ٢): حول العدد العشري $(87)_{10}$ إلى مكافئه الثنائي.

الحـــــل

خارج القسمة	الباقي	
$87 \div 2 = 43$	1	(LSB)
$43 \div 2 = 21$	1	
$21 \div 2 = 10$	1	
$10 \div 2 = 5$	0	
$5 \div 2 = 2$	1	
$2 \div 2 = 1$	0	
$1 \div 2 = 0$	1	(MSB)

ويكون الناتج:

$$(87)_{10} = (1010111)_2$$

ثانياً: تحويل الأعداد العشرية الكسرية إلى النظام الثنائي:

تدربنا على تحويل الأعداد العشرية الصحيحة إلى النظام الثنائي عن طريق تكرار القسمة على 2. أما الأعداد العشرية الكسرية "Decimal Fractions" فنستطيع تحويلها إلى النظام الثنائي عن طريق الضرب المتكرر في 2، ولتحويل العدد الكسري $(0.3125)_{10}$ إلى النظام الثنائي نجري العملية التالية:

نستمر حتى نصل للعدد المطلوب من الخانات العشرية أو نتوقف إذا كان الجزء العشري يساوي (صفراً).

MSB $(0.0101)_2$ LSB

	كسر	المحمول
$0.3125 \times 2 =$	0.625	0
$0.625 \times 2 =$	1.25	1
$0.25 \times 2 =$	0.5	0
$0.5 \times 2 =$	1.0	1

مثال (١- ٣): حول العدد العشري $(39.25)_{10}$ إلى نظيره الثنائي.

الحـــــل

نبدأ بتحويل العدد الصحيح بتكرار القسمة على ٢:

خارج القسمة	الباقي	
$39 \div 2 = 19$	1	(LSB)
$19 \div 2 = 9$	1	
$9 \div 2 = 4$	1	
$4 \div 2 = 2$	0	
$2 \div 2 = 1$	0	
$1 \div 2 = 0$	1	(MSB)

ويكون الناتج: $(39)_{10} = (100111)_2$

ثم نقوم بتحويل العدد الكسري وذلك بتكرار الضرب في 2 كما يلي:

MSB $(0\,.\,0\;\;1)_2$ LSB

كسر	المحمول	
$0.25 \times 2 = 0.5$	0	(MSB)
$0.5 \times 2 = 1.00$	1	(LSB)

وبذلك نحصل على: $(0.25)_{10} = (0.01)_2$

ويكون الناتج النهائي للعدد المطلوب هو: $(39.25)_{10} = (100111.01)_2$

١- ٣- ٢ التحويل من الثنائي إلى العشري Binary-to-Decimal Conversion

للتحويل من النظام الثنائي إلى النظام العشري تضرب كل خانة "Bit" في رتبة الخانة المقابلة لها أو وزنها ، ويجمع حاصل الضرب لكل خانة نحصل على العدد المكافيء.

مثال (١- ٤): حول العدد الثنائي $(1101001)_2$ إلى نظيره العشري.

الحـــــل

الوزن:	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
العدد الثنائي:	1	0	0	1	0	1	1

$$(1101001)_2 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

وبذلك نحصل على: $(1101001)_2 = (105)_{10}$

يحول الكسر في الأعداد الثنائية بوضع خانات "Bits" على يمين العلامة الثنائية "Binary Point" تماماً كما في الكسر العشري وتكون رتب الخانات أو أوزانها العددية في النظام الثنائي كما يلي:

$$\ldots\ldots 2^{4} \quad 2^{3} \quad 2^{2} \quad 2^{1} \quad 2^{0} \bullet 2^{-1} \quad 2^{-2} \quad 2^{-3} \quad 2^{-4}\ldots\ldots$$

العلامة الثنائية

مثال (١- ٥): حول العدد الكسري الثنائي $(0.1011)_2$ إلى مكافئة العشري.

الحـــــــل

$$\bullet \quad 2^{-1} \quad 2^{-2} \quad 2^{-3} \quad 2^{-4}$$

$$0 \;.\; 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$(0.1011)_2 = 1\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 1\times2^{-3} + 1\times2^{-4}$$

$$= 0.5 + 0 + 0.125 + 0.0625 = (0.6875)_{10}$$

١- ٤ النظام السداسي عشر للأعداد Hexadecimal Numbering System

يطلق على النظام السداسي عشر اسم نظام الأساس ستة عشر "16" لأنه يعتمد على عشرة أرقام وستة حروف هي "0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,*A,B,C,D,E,F*" مع ملاحظة أن الحروف "*A,B,C,D,E,F*" تكافئ الأعداد العشرية "10, 11, 12, 13, 14, 15" على الترتيب.

١- ٤- ١ التحويل من السداسي عشر إلى العشري Hexadecimal–to–Decimal Conversion

رتب الخانات في النظام السداسي عشر تمثل قوى العدد "16" أي "16^0 16^1 16^2 16^3 ..." من اليمين إلى اليسار وبالتالي فإن أوزانها "1 16 256 4096 ..." ويمكن التعبير عن العدد $(522.39)_{16}$ كالآتي:

الوزن:	16^{-2}	16^{-1}	•	16^{0}	16^{1}	16^{2}
العدد السداسي عشر:	9	3	•	2	2	5

$$(522.39)_{16} = 5\times16^{2} + 2\times16^{1} + 2\times16^{0} + 3\times16^{-1} + 9\times16^{-2}$$

$$= 5\times256 + 2\times16 + 2\times1 + 3\times0.0625 + 9\times0.0039062$$

$$= 1280 + 32 + 2 + 0.1875 + 0.0351558$$

وبالتالي يصبح الناتج النهائي هو: $(522.39)_{16} = (1314.222655)_{10}$

١- ٤- ٢ التحويل من العشري إلى السداسي عشر Decimal-to-Hexadecimal Conversion

طريقة تحويل الأعداد من النظام العشري إلى السداسي عشر تتم بتكرار القسمة على "16" والتي تماثل تماماً الطريقة التي استخدمت في التحويل من النظام العشري إلى الثنائي حيث اختلف الأساس هنا فأصبح "16" بدلاً من "2".

أولاً: تحويل الأعداد العشرية الصحيحة إلى النظام السداسي عشر:

لتحويل العدد العشري $(97)_{10}$ إلى مكافئة السداسي العشر فإننا نبدأ بقسمة العدد 97 على "16" ثم نقسم خارج القسمة الذي حصلنا عليه على "16" وهكذا حتى نحصل على خارج قسمة يساوي صفراً.

في كل خطوة من خطوات القسمة نحصل على باقٍ من خارج القسمة وهو الذي يشكل العدد السداسي عشر. الباقي الأول الذي نحصل عليه يمثل "LSB" والباقي الأخير يمثل "MSB" وهذه الخطوات كالآتي:

خارج القسمة	الباقي	
$97 \div 16 = 6$	1	(LSB)
$6 \div 16 = 0$	6	(MSB)

وبالتالي يكون الناتج كما يلي:

$$(97)_{10} = (61)_{16}$$

مثال (١- ٦): حول العدد العشري $(314)_{10}$ إلى مكافئة في النظام السداسي عشر.

الحـــــل

خارج القسمة	الباقي	
$314 \div 16 = 19$	A	(LSB)
$19 \div 16 = 1$	3	
$1 \div 16 = 0$	1	(MSB)

وبالتالي يكون الناتج كما يلي:

$$(314)_{10} = (13A)_{16}$$

ثانياً: تحويل الأعداد العشرية الكسرية إلى النظام السداسي عشر

يتم تحويل الأعداد الكسرية في خطوات مشابهة لطريقة تحويل الكسور في الثنائي وذلك عن طريق الضرب المتكرر في "16".

MSB $(0\,.\,C\;\;8)_2$ LSB

		المحمول	كسر
0.78125	x16 = 12.5	C	
0.5	x16 = 8.0	8	

وبذلك نحصل على: $(0.78125)_{10} = (0.C8)_{16}$

مثال (١- ٧): حول العدد العشري $(329.52)_{10}$ إلى مكافئة السداسي عشر.

الحـــــل

نبدأ بتحويل العدد الصحيح بتكرار القسمة على "16":

خارج القسمة	الباقي	
$329 \div 16 = 20$	9	(LSB)
$20 \div 16 = 1$	4	
$1 \div 16 = 0$	1	(MSB)

وبالتالي يكون الناتج: $(329)_{10} = (149)_{16}$

وبتكرار الضرب في "16" يتم تحويل العدد الكسرى:

كسر	المحمول	
$0.52 \times 16 = 8.32$	8	(MSB)
$0.32 \times 16 = 5.12$	5	
$0.12 \times 16 = 1.92$	1	
$0.92 \times 16 = 14.72$	E	
$0.72 \times 16 = 11.52$	B	
$0.52 \times 16 = 8.32$	8	(LSB)

بفرض عدد الخانات العشرية المطلوب "6" فتكون نتيجة التحويل هي: $(0.52)_{10} = (0.851EB8)_{16}$

ويكون الناتج النهائي للعدد المطلوب هو: $(329.52)_{10} = (149.851EB8)_{16}$

١- ٤- ٣ التحويل المباشر من السداسي عشر للثنائي Hexadecimal-to-Binary Dirct Conversion:

النظام السداسي عشر يتكون من "0,1,2,……,9,*A,B,C,D,E,F*" والحروف "*A,B,C,D,E,F*" تكافيء "10,11,12,13,14,15" على الترتيب، وبالتالي يمكن التحويل من النظام السداسي عشر إلى النظام الثنائي، بتمثيل كل خانة سداسي عشر بأربع خانات ثنائية "4-bit" كما بالجدول(١- ٢).

الجدول (١- ١): تمثيل العدد السداسي عشر كعدد عشري وعدد ثنائي

العدد العشري	العدد الثنائي	السداسي عشر
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	*A*
11	1011	*B*
12	1100	*C*
13	1101	*D*
14	1110	*E*
15	1111	*F*

مثال (١- ٨): حول العدد $(3A5)_{16}$ إلى مكافئة الثنائي.

الحـــــل

$$(3A5)_{16} = \begin{array}{ccc} 3 & A & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0011 & 1010 & 0101 \end{array} = (001110100101)_2$$

مثال (١- ٩): أوجد مكافىء العدد $(B35.D1)_{16}$ في النظام الثنائي.

الحـــــــل

$$(B35.D1)_{16} = \begin{array}{ccccc} B & 3 & 5 \bullet & D & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1011 & 0011 & 0101 \bullet & 1101 & 0001 \end{array} = (101100110101.11010001)_2$$

١- ٤- ٤ التحويل المباشر من الثنائي للسداسي عشر Binary-to-Hexadecimal Direct Conversion:

التحويل من النظام الثنائي إلى النظام السداسي عشر يتم بتكوين مجموعات مكونة من أربع خانات ثنائية ابتداءً من يمين الفاصلة الثنائية للعدد الصحيح وعلى يسار الفاصلة الثنائية للعدد الكسري ثم كتابة ما يقابل كل مجموعة مكونة من أربع خانات بما يكافئها في النظام السداسي عشر.

مثال (١- ١٠): حول العدد الثنائي $(110111101.101001)_2$ إلى نظيره السداسي عشر.

الحـــــــل

$$\begin{array}{ccccc} 0001 & 1011 & 1101 \bullet & 1010 & 0100 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & B & D \bullet & A & 4 \end{array}$$

لاحظ أنه تمت زيادة صفرين على يمين الكسر وثلاثة أصفار على يسار العدد الصحيح.

$(110111101.101001)_2 = (1BD.A4)_{16}$

مثال (١- ١١): حول العدد الثنائي $(110101011.01101)_2$ إلى نظيره في النظام السداسي عشر.

الحـــــــل

$$\begin{array}{ccccc} 0001 & 1010 & 1011 \bullet & 0110 & 1000 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & A & B \bullet & 6 & 8 \end{array}$$

$(110101011.01101)_2 = (1AB.68)_{16}$

١- ٥ العمليات الحسابية في النظام الثنائي Arithmatic Operations in Binary System:

١- ٥- ١ جمع الأعداد الثنائية Addition of Binary Numbers

لإجراء عمليات الجمع في النظام الثنائي، نجد أن هناك أربعة قواعد أساسية "Binary Digits" وهي كالآتي:

$0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1$

$1 + 0 = 1$

$1 + 1 = 0$ Carry (المحمول) $1 \Rightarrow = (10)_2$

القواعد الثلاثة الأولى لا تحتاج إلى مزيد من الإيضاح، والقاعدة الرابعة تقول إنه في حالة جمع 1 + 1 فإن حاصل الجمع بالعشري "2" ويكتب في الثنائي 10_2، فيكون الناتج 0 مع ترحيل 1 إلى العمود التالي كما في الجمع العشري العادي.

مثال (١- ١٢): اجمع الرقمين الثنائيين: 011, 100.

الحـــــل

$$\begin{array}{rrr} & 1 & 0 & 0 \\ + & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ +\,3 \\ \hline 7 \end{array} \text{ (عشري)}$$

مثال (١- ١٣): اجمع الرقمين الثنائيين: 011, 110.

الحـــــل

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 0 \\ & +0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ +\,3 \\ \hline 9 \end{array} \text{ (عشري)}$$

١-٥-٢ طرح الأعداد الثنائية Subtraction of Binary Numbers :

هناك طريقتان لإجراء عملية الطرح وهما:

- أولا: الطريقة الحسابية المباشرة.
- ثانيا: عن طريق المتمم الأحادي أو المتمم الثنائي.

ولإجراء الطرح بالطريقة المباشرة (الحسابية) يجب معرفة القواعد الأساسية لهذه العملية مع ملاحظة أن المقدار المطروح منه على اليسار والمقدار المطروح على اليمين:

$0 - 0 = 0$
$1 - 0 = 1$
$1 - 1 = 0$
$0 - 1 = 1$ ⟵ النتيجة حيث استلفنا " 1 " من الرتبة الأعلى

ويمكن تلخيص عملية الطرح في الطريقة المباشرة كما يلي:

- رتب الأرقام تحت بعضها بحيث تظهر في صورة أعمدة أو خانات واضحة.
- ابدأ من الخانة الأولى على اليمين متجهاً إلى اليسار متبعاً قواعد الطرح:
  - القواعد الثلاث الأولى لا تحتاج إلى مزيد من الإيضاح.
  - القاعدة الرابعة: عند طرح "1" من "0" نضع في الناتج "1" ثم نغير كل "0" من الخانات التالية في المطروح منه إلى "1" حتى نصل إلى أقرب "1" فنغيره إلى "0".
- أكمل بعد ذلك علمية الطرح باستخدام القواعد السابقة.

مثال (١-١٤): اطرح المقدار (011) من المقدار (101).

الحـــــل

عندما استلفنا 1 أصبحت هذه الخانة 0 ⟵

	0	1	
المطروح منه	~~1~~	0	1
المطروح	− 0	1	1
	0	1	0

أستلفنا 1 من العمود الذي يليه فأصبحت الخانة تحتوى 10_2 وبطرح 1 منها يصبح الناتج 1.

١- ٥- ٣ المتمم الأحادي والثنائي للأعداد الثنائية 1's and 2's Complements of Binary Numbers:

إن أهمية المتممين الأحادي والثنائي يكمن في سماحهما لنا بتمثيل الأعداد الثنائية السالبة. والمتمم الثنائي هو الأكثر شيوعاً واستخداماً في أجهزة الحاسوب للتعامل مع الأعداد السالبة. وللحصول على المتمم الأحادي لأي عدد ثنائي فإننا نغير كل "1" إلى "0" ونغير كل "0" إلى "1" في العدد الثنائي كما يلي:

العدد الثنائي ⟸ 1 0 1 1 0 0 1 1

المتمم الأحادي ⟸ 0 1 0 0 1 1 0 0

أما المتمم الثنائي للعدد الثنائي فإنه يمكن إيجاده بطريقتين كما يلي:

<u>الطريقة الأولى:</u> نقوم بايجاد المتمم الأحادي كما سبق. ثم بعد ذلك نقوم بإضافة العدد "1" إلى المتمم الأحادي الذي حصلنا عليه وبذلك نحصل على المتمم الثنائي أي إن: المتمم الثنائي= المتمم الأحادي+1

ومثال ذلك نفترض أننا نريد الحصول على المتمم الثنائي للعدد الثنائي 10110011، حيث يجب أولاً الحصول على المتمم الأحادي ثم نجمع عليه "1" لنحصل على المتمم الثنائي للعدد.

العدد الثنائي ⟸ 1 0 1 1 0 0 1 1

المتمم الأحادي ⟸ 0 1 0 0 1 1 0 0

نضيف "1" + 1

المتمم الثنائي ⟸ 0 1 0 0 1 1 0 1

<u>الطريقة الثانية:</u> نقوم بالنظر للخانة الثنائية ذات القيمة الدنيا (LSB) من أقصى اليمين للعدد الثنائي فإن كانت تساوي "0" نقوم بكتابته ونستمر في ذلك وبمجرد أن نقابل أول خانة ثنائية تساوي "1" عند ذلك نقوم بكتابة الواحد الذي قابلناه ثم بعد ذلك نقوم بقلب الصفر واحد والواحد صفراً وهكذا إلى أن ننتهي من كتابة العدد. وفي حال قابلنا في الخانة الثنائية ذات القيمة الدنيا واحد فإننا نقوم بكتابته ثم نتبع الطريقة السابقة بقلب الصفر إلى واحد والواحد إلى صفر.

ومثال على ذلك، نفترض أننا نريد تحويل العدد الثنائي $(10101101)_2$ إلى المتمم الثنائي:

العدد الثنائي ⟸ 1 0 1 0 1 1 0 1

المتمم الأحادي

المتمم الثنائي ⟸ 0 1 0 1 0 0 1 1

١- ٥- ٤ تمثيل الأعداد ذات الإشارة Representation of Signed Numbers:

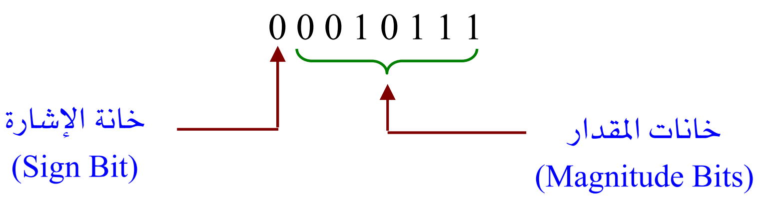
النظم الرقمية التي تستخدم في الحاسب يجب أن تكون لديها القدرة على التعامل مع الأعداد الموجبة والسالبة على حد سواء ونتيجة لذلك فإن الخانة الثنائية ذات القيمة العليا والموجودة في أقصى يسار العدد الثنائي تمثل إشارة العدد، حيث يوضع في هذه الخانة "0" للعدد الموجب، ويوضع بها "1" للعدد السالب.

فمثلاً في حالة العدد الثنائي المكون من ثمانية خانات ثنائية فإن الخانة الثنائية ذات القمية العليا للعدد والموجودة في أقصى يسار العدد تمثل إشارة العدد"Sign" وبقية الخانات تمثل قيمة العدد "Magnitude".

وهناك ثلاثة طرق لتمثيل الأعداد ذات الإشارة في النظام الثنائي وهي: طريقة إشارة المقدار "Sign-Magnitude" والمتمم الأحادي "1's Complement" والمتمم الثنائي"2's Complement".

أولاً: نظام إشارة المقدار Sign-Magnitude System :

عند تمثيل العدد الثنائي بنظام إشارة المقدار، فإن الخانة الثنائية "Bit" ذات القيمة العليا والموجودة في أقصى يسار العدد تمثل خانة الإشارة وبقية الخانات تمثل مقدار العدد. فمثلاً لتمثيل العدد العشري (+23) بنظام إشارة المقدار فإننا نكتب العدد كالتالي:



ولتمثيل العدد العشري (-23) فإننا نكتب ما يلي:

1 0 0 1 0 1 1 1

حيث نلاحظ أن الفرق الوحيد بين العددين (+23) ، (–23) هو في خانة الإشارة فقط.

ثانياً: نظام المتمم الأحادي 1's Complement System :

الأعداد الموجبة في نظام المتمم الأحادي تمثل بنفس الطريقة التي تمت بنظام إشارة المقدار، أما الأعداد السالبة فيتم الحصول عليها بإيجاد المتمم الأحادي للعدد الموجب. لذا يمثل العدد العشري (23–) بإيجاد المتمم الأحادي كالآتي:

العدد (23+) ⟸ 0 0 0 1 0 1 1 1

العدد (23–) ⟸ 1 1 1 0 1 0 0 0

حيث أن الإشارة تمثلها الخانة الأخيرة ذات القيمة العليا الموجودة في أقصى يسار العددين.

ثالثاً: نظام المتمم الثنائي 2's Complement System :

كما في نظام المتمم الأحادي فإن الأعداد الموجبة في نظام المتمم الثنائي تمثل بنفس الطريقة كما في نظام إشارة المقدار. أما الأعداد السالبة فنحصل عليها عن طريق إيجاد المتمم الثنائي للعدد الموجب. فمثلاً العدد العشري (23–) يمكن تمثيله عن طريق إيجاد المتمم الثنائي للعدد (23+) كما يلي:

العدد (23+) ⟸ 0 0 0 1 0 1 1 1

العدد (23–) ⟸ 1 1 1 0 1 0 0 1

وكما ذكرنا سابقاً فإن نظام المتمم الثنائي هو الأكثر شيوعاً واستخداماً في النظم الحاسوبية.

١- ٥- ٥ العمليات الحسابية للأعداد ذات الإشارة Arithmetic Operations of Signed Numbers

تعلمنا سابقاً كيف يمكن تمثيل الأعداد ذات الإشارة بثلاث نظم مختلفة، وهنا سوف نتعلم كيف نجري العمليات الحسابية المختلفة على الأعداد ذات الإشارة وسنكتفي هنا بشرح عملية الطرح فقط، حيث إننا شرحنا عملية الجمع بالتفصيل في الجزء (١- ٥).

ولأن نظام المتمم الثنائي كما أسلفنا هو الأكثر استخداماً لتمثيل الأعداد السالبة في أجهزة الحاسوب فسوف نكتفي هنا بشرح عملية الطرح باستخدام نظام المتمم الثنائي فقط. ولفهم عملية طرح الأعداد ذات الإشارة باستخدام المتمم الثنائي فإننا سوف نعطي بعض الأمثلة كما يلي.

مثال (١- ١٥): اطرح المقدار الثنائي 00001110 من المقدار الثنائي 01111010 باستخدام المتمم الثنائي للأعداد.

الحـــــل

لإجراء عملية الطرح باستخدام المتمم الثنائي نرتب العددين كالآتي ثم نقوم بالجمع طبقاً لقواعد الجمع في النظام الثنائي لنحصل على الناتج:

(+122) المطروح منه	0 1 1 1 1 0 1 0	
المتمم الثنائي للمطروح	+ 1 1 1 1 0 0 1 0	
(+108) ناتج الطرح	$\cancel{1}$ 0 1 1 0 1 1 0 0	يهمل المحمول(Discard carry)

وللتأكد من الناتج يمكن إجراء عملية الطرح بالنظام العشري بعد تحويل الأعداد الثنائية إلى النظام العشري كما يلي:

$122 - (14) = 108$

مثال (١- ١٦): قم بإجراء عملية الطرح الآتية باستخدام المتمم الثنائي: $(00001000)_2 - (00000100)_2$.

الحـــــل

لإجراء عملية الطرح باستخدام المتمم الثنائي نرتب العددين لنحصل على الناتج كالآتي:

(+8) المطروح منه	0 0 0 0 1 0 0 0
المتمم الثنائي للمطروح	+ 1 1 1 1 1 1 0 0
(+4) الفرق	$\cancel{1}$ 0 0 0 0 0 1 0 0

يهمل المحمول
(Discard carry)

وللتأكد من الناتج يمكن إجراء عملية الطرح بالنظام العشري بعد تحويل الأعداد الثنائية إلى النظام العشري كما يلي:

$8 - 4 = 8 + (-4) = 4$

مثال (١- ١٧): قم باجراء علمية الطرح الآتية باستخدام المتمم الثنائي $(00001001)_2 - (01100111)_2$.

الحـــــــل

لإجراء عملية الطرح باستخدام المتمم الثنائي نرتب العددين لنحصل على الناتج كالآتي:

(+103) المطروح منه	0 1 1 0 0 1 1 1
المتمم الثنائي للمطروح	+ 1 1 1 1 0 1 1 1
(+94) الفرق	~~1~~ 0 1 0 1 1 1 1 0

يهمل المحمول
(Discard carry)

وللتأكد من حاصل الطرح يمكننا إجراء عملية الطرح بالنظام العشري حيث نقوم بتحويل الأعداد الثنائية إلى العشري كما يلي:

$103 - (9) = 94$

تدريبات على الوحدة الأولى

١-١) حول كلٌ من الأعداد العشرية الآتية إلى مكافئاتها الثنائية:

a) 64 b) 112 c) 257 d) 27.26
e) 77.0625 f) 47.875 g) 33.125

١-٢) حول كلٌ من الأعداد الثنائية التالية إلى مكافئاتها العشرية:

a) 11011 b) 1110101 c) 111111 d) 1110.11
e) 10101.1101 f) 1100001.11011

١-٣) حول الأعداد العشرية الآتية إلى ما يكافئها في النظام السداسي عشر:

a) 14 b) 80 c) 560 d) 3000
e) 62500 f) 204.125 g) 255.875 h) 631.25

١-٤) حول الأعداد السداسية عشر التالية إلى مكافئاتها في النظام العشري:

a) 9*F* b) *D*52 c) 67*F* d) *ABCD*
e) *F*.4 f) *B*3.*E* g) 1111.1 h) 888.8

١-٥) حول الأعداد الآتية من النظام السداسي عشر إلى النظام الثنائي:

a) 8 b) 1*C* c) *A*64 d) 1F.*C* e) 239.4

١-٦) حول الأعداد الثنائية التالية إلى ما يكافئها في النظام السداسي عشر:

a) 1001.1111 b) 10000.1 c) 110101.11001
d) 10100111.111011 e) 1000000.000111 f) 1111100.1000011

١-٧) أوجد حاصل جمع كل من الأعداد الثنائية الآتية:

a) 100 + 111 b) 1110.11 + 11.10
c) 1111 + 1101 d) 1001.101 + 1101.11

١-٨) أوجد باقي الطرح للأعداد الثنائية الآتية بالطريقة المباشرة:

a) 1101 – 0100 b) 1001 – 0111
c) 11010 – 10111 d) 1100 – 1001

(١- ٩) أوجد المتمم الأحادي لكل من الأعداد الثنائية الآتية:

a) 00110101 b) 11100100 c) 00010101

(١- ١٠) أوجد المتمم الثنائي لكل من الأعداد الثنائية الآتية:

a) 11110110 b) 01011101 c) 00110011

(١- ١١) اكتب العدد الثنائي المكافىء لكل من الأعداد العشرية الآتية في شكل إشارة المقدار بحيث يتكون العدد الثنائي من ثماني خانات (8-bits):

a) +28 b) – 83 c) +99 d) – 120

(١- ١٢) اكتب العدد الثنائي المكافىء لكل من الأعداد العشرية الآتية في شكل المتمم الأحادي بحيث يتكون العدد الثنائي من ثماني خانات (8-bits):

a) +14 b) – 63 c) +107 d) – 122

(١- ١٣) أعد حل السؤال رقم (٨) بحيث يكون العدد الثنائي في شكل المتمم الثنائي.

(١- ١٤) احسب القيمة العددية العشرية للأعداد الثنائية ذات الإشارة التالية وذلك بنظام إشارة المقدار:

a) 101110001 b) 01100100 c) 10110011

(١- ١٥) احسب القيمة العددية العشرية للأعداد الثنائية ذات الإشارة التالية وذلك بنظام المتمم الأحادي:

a) 10011101 b) 01100110 c) 10101101

(١- ١٦) احسب القيمة العددية العشرية للأعداد الثنائية ذات الإشارة التالية وذلك بنظام المتمم الثنائي:

a) 10101011 b) 000111101 c) 10111011

(١- ١٧) قم باجراء عمليات الطرح الآتية باستخدام نظام المتمم الثنائي:

a) 00010110 – 00110011 b) 01110000 – 10101111
c) 10001100 – 00111001 d) 11011001 – 11100111