

ستاتيكا

العزوم والازدواج

العزوم والازدواج

٢

الفصل الثاني: العزوم والازدواج

الجدارة:

معرفة حساب عزم قوة حول نقطة معينة وكذلك حساب عزم مجموعة من القوى وكيفية تحليل قوة إلى قوة وعزم ازدواج.

الأهداف:

عندما يكتمل هذا الفصل يكون لديك القدرة على:

- حساب عزم قوة حول محور أو نقطة معينة
- حساب عزم مجموعة من القوى
- حساب عزم الازدواج
- كيفية تحليل قوة إلى قوة وعزم ازدواج

مستوى الأداء المطلوب : أن يصل المتدرّب إلى إتقان هذه الحدارة بنسبة ١٠٠٪.

الوقت المتوقع للفصل: ٦ ساعات

الوسائل المساعدة :

- آلة حاسبة
- مسطرة وطقم مثلثات

متطلبات الجدارة:

معرفة ما سبق دراسته في مقرر الرياضيات وخاصة قوانين الزوايا والمثلثات والتمكّن مما سبق دراسته في الفصل السابق: العمليات الأساسية على القوى.

العزوم وعزوم الازدواج

٢-١ - العزم الناتج عن قوة:

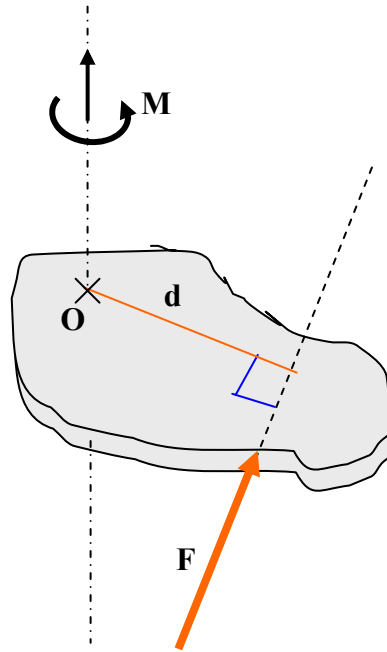
إذا أثرت قوة على جسم صلب وقامت بتدويره حول محور لا يقطع خط عملها ولا يوازيه: يدعى هذا التأثير بعزم القوة (moment of force: M) حول المحور المقصود. كذلك يطلق على عزم القوة بعزم الدوران (moment of rotation).

تتناسب قيمة العزم مع مقدار القوة وذراع العزم d (moment arm): وهي المسافة العمودية من محور الدوران (أو نقطة من المحور) إلى خط عمل القوة. وعليه فإن مقدار عزم القوة F حول أي نقطة تقع في نفس مستوى القوة يساوي حاصل ضرب مقدار القوة في ذراع العزم (شكل ٢-١):

$$\text{مقدار عزم القوة } F \text{ حول النقطة } O = (\text{مقدار القوة}) \times (\text{المسافة})$$

العمودية بين خط عمل القوة والنقطة المراد حساب العزم حولها

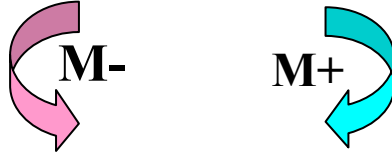
$$\text{Moment} = \text{Force} \times \text{Perpendicular Distance}$$



شكل (٢-١)

حيث تسمى النقطة O مركز العزم (moment center)، ويعرف العزم بالمتجه الحر (free vector) العمودي على مستوى الجسم، ويعتمد اتجاه M على اتجاه تدوير F للجسم. ويتضح مما سبق أن عزم القوة حول أي نقطة تقع على خط عمل القوة يساوي صفراً.

يمكن الاتفاق على أن يعتبر العزم موجبا إذا كان اتجاه الدوران مع اتجاه دوران عقارب الساعة، ويكون سالبا عكس ذلك، ويوضّح ذلك الشكل (٢-٢).



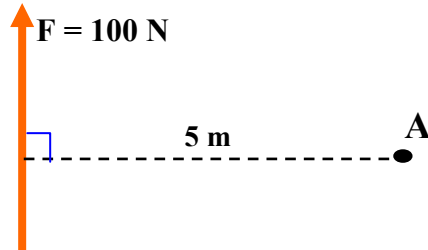
شكل (٢-٢)

بما أن عزم القوة هو حاصل ضرب قوّة و مسافة، فإن وحدة العزم هي حاصل ضرب وحدة القوة ووحدة الطول. وعليه وحدة العزم الأساسية في النظام العالمي هي : النيوتن × متر (N×m).

مثال ٢-١:

احسب مقدار العزم الناتج عن القوة $F = 100 \text{ N}$ حول النقطة A كما هو مبين في الشكل (٢-٣).

الحل:



شكل (٢-٣)

العزم حول النقطة O يساوي:

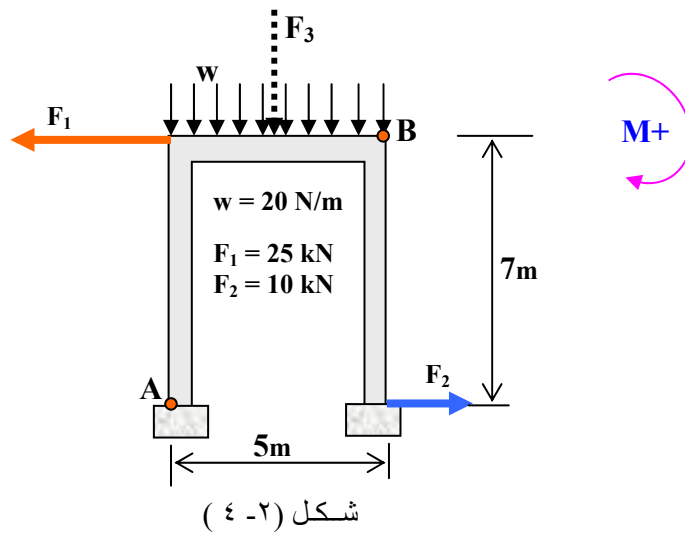
$$M_{F/O} = + 100 \times 5 = + 1000 \text{ N.m}$$

ويلاحظ أن قيمة العزم موجبة لأن اتجاه دوران العزم مع اتجاه دوران عقارب الساعة.

مثال ٢- ٢:

يتعرض الإطار الموضح في الشكل (٢- ٤) إلى مجموعة قوى، عليه:

- a- احسب مقدار عزم القوة F_1 حول النقطة A : $M_{F1/A}$
- b- احسب مقدار عزم القوة F_2 حول النقطة A : $M_{F2/A}$
- c- احسب مقدار عزم القوة F_2 حول النقطة B : $M_{F2/B}$
- d- احسب مقدار عزم القوى الموزعة w حول النقطة B : $M_{w/B}$



الحل:

$$M_{F1/A} = - F_1 \times 7 = -25 \times 7 = -175 \text{ kN.m} \quad (a)$$

(b) يلاحظ أن خط عمل القوة F_2 يمر بالنقطة A وعليه فإن قيمة ذراع العزم تساوي صفراً، وبالتالي يكون:

$$M_{F2/A} = F_2 \times 0 = 0$$

$$M_{F2/B} = - F_2 \times 7 = -10 \times 7 = -70 \text{ kN.m} \quad (c)$$

(d) تستبدل القوى الموزعة بقوة مركزة مكافئة، أي أن:

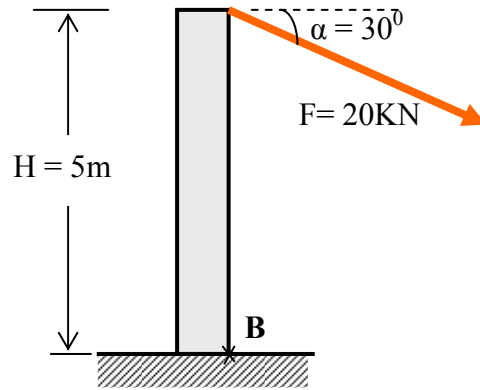
$$F_3 = 20 \times 5 = 100 \text{ N}$$

وبالتالي يكون عزم القوة المكافئة حول النقطة B:

$$M_{w/B} = M_{F3/B} = -100 \times 5/2 = -250 \text{ N.m}$$

مثال ٢- ٣:

احسب مقدار عزم القوة $F = 20 \text{ kN}$ حول النقطة B كما هو مبين في الشكل رقم (٢- ٥).

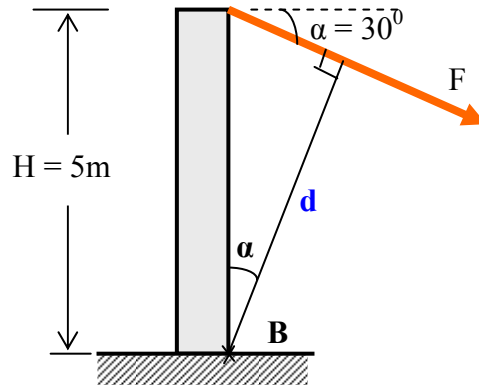


شكل (٢- ٥)

الحل:

يتم في البداية حساب ذراع العزم (d) كما في الشكل (٢- ٦) وذلك على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= d/H \\ d &= H \cos \alpha \\ d &= 5 \times \cos 30^\circ \\ d &= 4.33 \text{ m} \end{aligned}$$



شكل (٢- ٦)

وبالتالي، عزم القوة F حول النقطة B يساوي:

$$M_{F/B} = +20 \times 4.33 = 86.6 \text{ kN.m}$$

ويلاحظ أن إشارة العزم هي موجبة لأن اتجاه الدوران حول B مع اتجاه دوران عقارب الساعة.

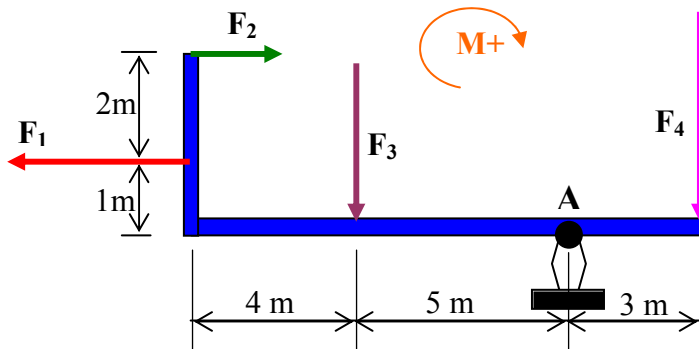
٢-٢ - عزم مجموعة قوى:

إذا كان تعرض جسم تحت تأثير مجموعة من القوى (F_1, F_2, F_3, \dots)، فإن قيمة عزم مجموعة القوى حول نقطة معينة O (M_O) تساوي جمع قيم عزوم القوى المنفردة حول نفس النقطة، أي أن:

$$\Sigma M_O = M_O = MF_{1/O} + MF_{2/O} + MF_{3/O} + \dots$$

مثال ٢ - ٤ :

أوجد قيمة العزم حول النقطة A لجميع القوى المؤثرة على الجسم المبين في الشكل رقم (٢ - ٧).



$$\begin{aligned} F_1 &= 70 \text{ kN} \\ F_2 &= 20 \text{ kN} \\ F_3 &= 50 \text{ kN} \\ F_4 &= 100 \text{ kN} \end{aligned}$$

شكل (٢ - ٧)

الحل:

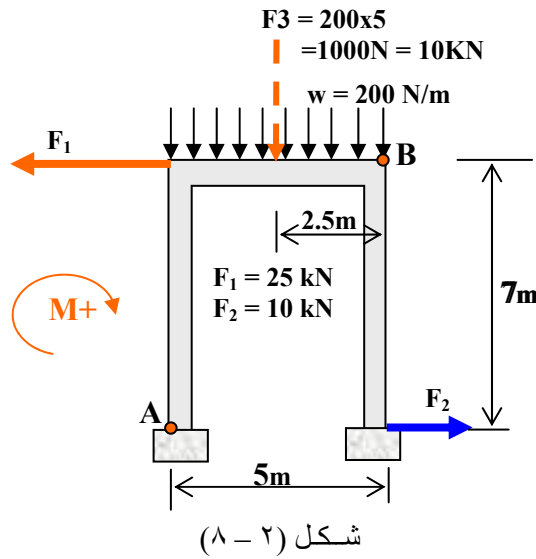
يحتوي هذا المثال على أربعة قوى مؤثرة على الجسم، وعليه يوجد أربعة عزوم مؤثرة حول النقطة A. مع التذكير أن العزم يكون موجبا إذا كان اتجاه الدوران مع اتجاه دوران عقارب الساعة.

$$\begin{aligned}\Sigma M_A = M_A &= MF_{1/A} + MF_{2/A} + MF_{3/A} + MF_{4/A} \\ &= -F_1 \times 1 + F_2 \times 3 - F_3 \times 5 + F_4 \times 3 \\ &= -70 + 60 - 250 + 300 \\ \Sigma M_A = M_A &= + 40 \text{ kN.m}\end{aligned}$$

ملاحظة: عند الإجابة، يستحسن دائما رسم الإتجاه الموجب للعزم بجانب شكل التمرين.

مثال ٢- ٥:

- أ - احسب العزم حول النقطة A لمجموعة القوى المؤثرة على الإطار كما هو مبين في الشكل (٢ - ٨).
ب - احسب العزم حول النقطة B لمجموعة القوى.



الحل:

أ -

$$\begin{aligned}\Sigma M_A = M_A &= MF_{1/A} + MF_{2/A} + MF_{3/A} \\ &= -F_1 \times 7 + F_2 \times 0 + F_3 \times 2.5 \\ &= -175 + 0 + 25 \\ \Sigma M_A = M_A &= -150 \text{ kN.m}\end{aligned}$$

يلاحظ استبدال القوى الموزعة بقوة مركزة مكافئة:

$$F_3 = 200 \times 5 = 1000 \text{ N}$$

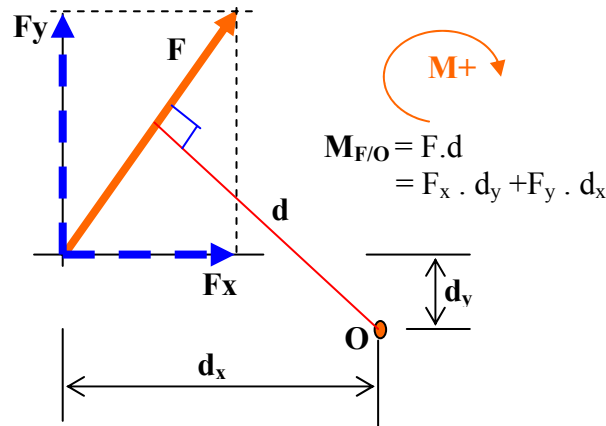
وتم تبديل وحدتها إلى KN حتى يكون لها نفس وحدة القوى الأخرى.

ب -

$$\begin{aligned}\Sigma M_B = M_B &= MF_{1/B} + MF_{2/B} + MF_{3/B} \\ &= F_1 \times 0 - F_2 \times 7 - F_3 \times 2.5 \\ &= 0 - 70 - 25 \\ \Sigma M_B = M_B &= -95 \text{ kN.m}\end{aligned}$$

٢-٣ - نظرية "فارينيون" Varignon's Theorem :

تتص نظرية "فارينيون" (تعرف كذلك باسم نظرية أو قاعدة العزوم) أن عزم قوة ما F حول نقطة O يساوي مجموع عزوم مركبات هذه القوة حول نفس النقطة O (شكل ٢ - ٩) .



شكل (٢ - ٩)

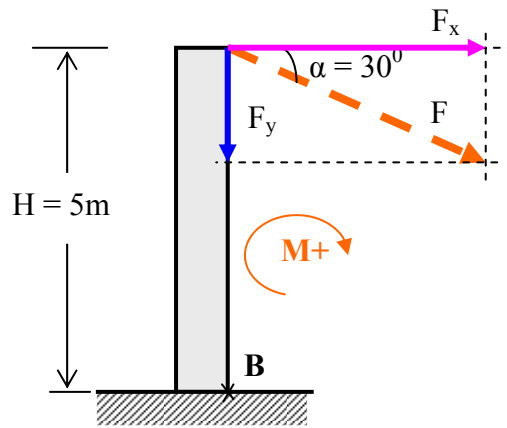
سوف تساعد هذه النظرية في تبسيط حل العديد من المسائل الهندسية في الفصول اللاحقة.

مثال ٢- ٦ :

احسب قيمة عزم القوة $F = 20 \text{ kN}$ حول النقطة B كما هو مبين في الشكل رقم (٢- ٦) من المثال (٢- ٣).

الحل:

بدل البحث عن ذراع العزم كما في حل المثال (٢- ٣)، يتم تحليل القوة إلى مركبتها كما هو مبين في الشكل رقم (٢- ١٠) ثم حساب العزم:



شكل (٢- ١٠)

$$F_x = F \cos(30^\circ) = 20 \times \cos(30^\circ) = 17.32 \text{ KN} \quad \text{المركبة الأفقية:}$$

$$F_y = F \sin(30^\circ) = 20 \times \sin(30^\circ) = 10 \text{ KN} \quad \text{المركبة العمودية:}$$

عزم F_x حول النقطة B :

$$M_{F_x/B} = 17.32 \times 5 = +86.6 \text{ KN.m}$$

عزم F_y حول النقطة B (خط عمل F_y يتلاقى مع النقطة B وعليه):

$$M_{F_y/B} = 10 \times 0 = 0$$

إذا أصبح عزم القوة F حول النقطة B يساوي مجموع عزوم المركبتين الأفقية والعمودية حول نفس النقطة :

$$\begin{aligned} M_{F/B} &= MF_{x/B} + MF_{y/B} \\ &= 86.6 + 0 = 86.6 \text{ KN.m} \end{aligned}$$

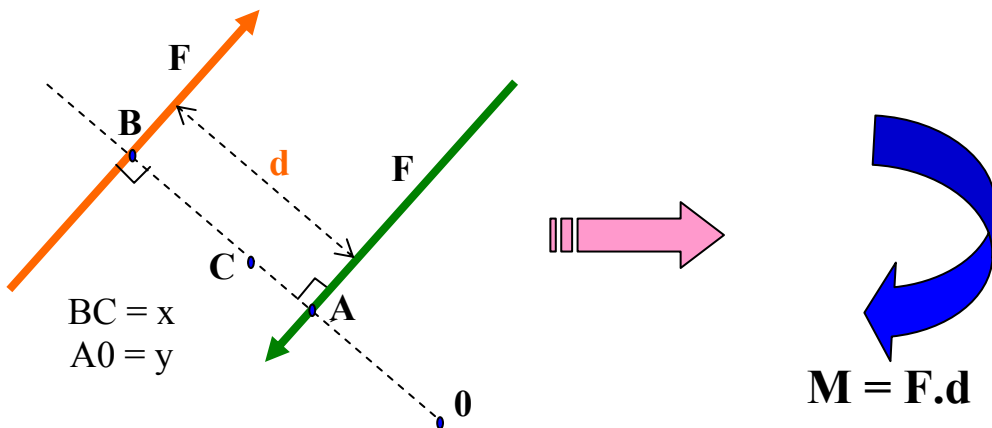
وهي نفس النتيجة كما في المثال (٢ - ٣).

٢-٤- عزم الازدواج (Moment of Couple):

يسمى العزم الناتج من تأثير قوتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه ولا تقعان على خط واحد بعزم الازدواج.

فإذا كانت القوتان F و $-F$ متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه والمسافة بينهما d كما هو موضح في الشكل (٢ - ١١) فلا يمكن دمجهما كقوة واحدة طالما محصلتهما تكون صفرا بل يكون تأثيرهما الكلي توليد حركة دورانية.

إن مجموع عزمي القوتين F و $-F$ حول أي محور عمودي على مستواهما ومار من أي نقطة مثل O في ذلك المستوى هو عزم الازدواج M_0 وقيمته : $M_0 = F.d$ حيث d : هي المسافة العمودية بين القوتين.



شكل (٢ - ١١)

إن عزم الازدواج حول أي نقطة في مستوى قوتيه ثابت ويساوي حاصل ضرب إحدى القوتين والبعد العمودي بين خطي عمل القوتين. وبالإشارة إلى شكل (٢- ١١) يتضح:

$$M_A = F.d + F.0 = F.d$$

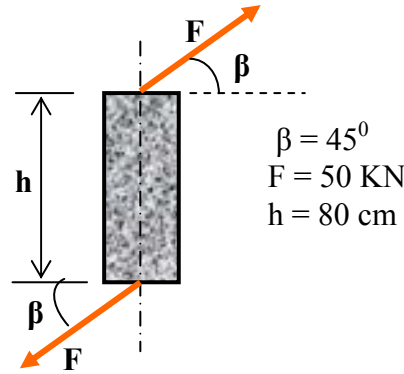
$$M_B = F.0 + F.d = F.d$$

$$M_C = F.x + F(d-x) = F.d$$

$$M_0 = F(d+y) - F.y = F.d$$

مثال ٢- ٧:

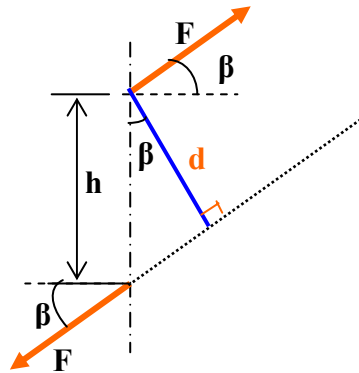
أوجد مقدار الإزدواج الناتج عن القوتين المؤثرتين على المقطع المستطيل الشكل كما هو مبين في الشكل رقم (٢- ١٢).



شكل (٢- ١٢)

الحل:

المسافة العمودية لعزم الإزدواج d ، كما هو موضح في الشكل (٢- ١٣) ، تستنتج من العلاقة:



شكل (٢- ١٣)

$$d = h \cdot \cos \beta$$

وعليه:

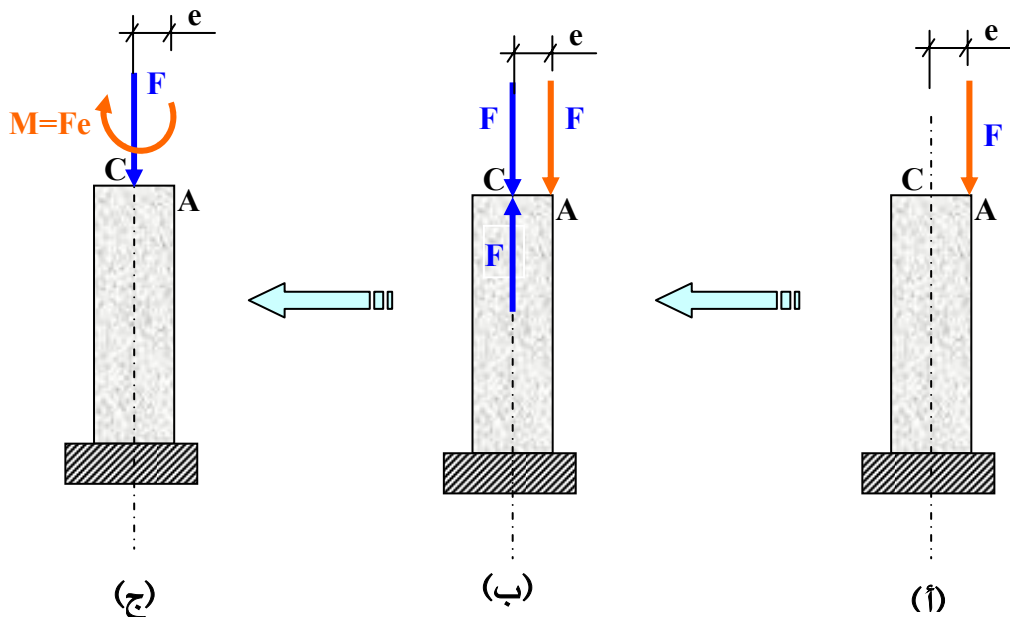
$$M = F \times d = F \times h \times \cos \beta = 50 \times 80 \times \cos 45^\circ$$

$$M = 2828.43 \text{ kN.cm} = 28.2843 \text{ kN.m}$$

٢-٥ - تحليل قوة إلى قوة وعزم ازدواج:

في بعض الأحيان تصبح دراسة تأثير قوة على جسم أكثر سهولة عندما تؤثر هذه القوة عند نقطة معينة. ويمكن نقل أي قوة واستبدالها بقوة أخرى موازية ولها نفس المقدار والاتجاه بالإضافة إلى ازدواج. بحيث يساوي عزم هذا الازدواج حاصل ضرب مقدار القوة والمسافة بين خطي عمل القوة الأصلي والنهائي. وتعرف هذه العملية بمبدأ إنتقالية القوة (transmissibility of force). ويمكن إثبات هذا المبدأ بسهولة عند تذكر أن التأثير الخارجي على أي جسم صلد لأي قوتين متساويتين في المقدار ومتضادتين في الاتجاه ومشتريكتين في نفس خط العمل هو تأثير معدوم.

فعلى سبيل المثال عندما تؤثر القوة F على جسم عند النقطة A كما في شكل (٢-١٤ أ)، والمطلوب نقل هذه القوة إلى مركز الجسم C ، وللوصول إلى ذلك تضاف قوتان رأسيان عند النقطة C متضادتان في الاتجاه وتقعان على خط عمل واحد ومقدار كل منهما F كما في شكل (٢-١٤ ب) وكما سبق ذكره فإن هذه الإضافة ليس لها تأثير على الجسم. وبالتالي تكون القوة المضافة المتجهة إلى أعلى مع القوة الأصلية ازدواجا عزمه $F \times e$ وتبقى قوة موازية وبنفس الاتجاه والمقدار للقوة الأصلية عند النقطة المطلوبة C كما في الشكل (٢-١٤ ج).

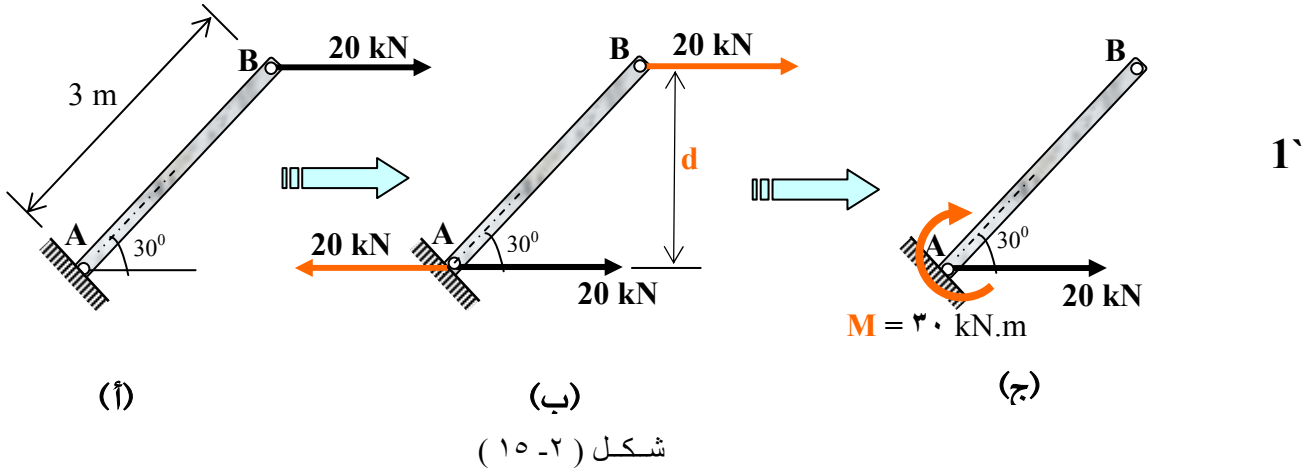


شكل (٢-١٤)

من ناحية أخرى ، يمكن عكس العملية السابقة باستبدال قوة وازدواج بقوة مفردة.

مثال ٢ - ٨ :

استبدال القوة الأفقية $F = 20 \text{ kN}$ المؤثرة في النقطة B بقوة مماثلة وعزم ازدواج في النقطة A كما هو مبين في الشكل رقم (٢ - ١٥ - أ).



الحل:

بتطبيق قوتين في النقطة A متوازيتين مع القوة F ومتساويتين معها في المقدار ومتضادتين في الاتجاه كما هو مبين في الشكل (٢ - ١٥ - ب). وبما أن القوة في النقطة B والقوة على يسار النقطة A هما متساويتان ومتوازيتان ومتضادتان في الاتجاه فإنهما يكونان عزم ازدواج يساوي M بحيث يكون:

$$M = F.d$$

حيث d هي المسافة العمودية بين القوتين:

$$d = 3 \times \sin(30^\circ) = 3 \times 0.50 = 1.5 \text{ m}$$

ويصبح عزم الازدواج:

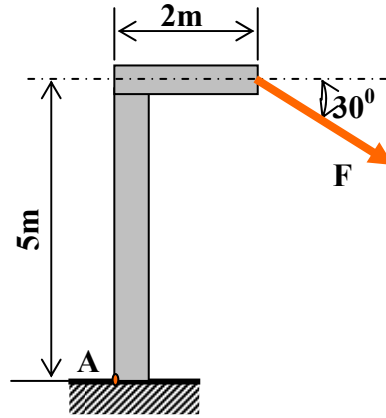
$$M = 20 \times 1.5 = 30 \text{ kN.m}$$

مع ملاحظة أن إشارة عزم الازدواج هي موجبة وذلك لأن الدوران هو في اتجاه دوران عقارب الساعة. وبالتالي يمكن تغيير مكان تأثير القوة F من النقطة B إلى النقطة A مع إضافة عزم ازدواج في النقطة A مقداره $+30 \text{ kN.m}$ كما هو مبين في الشكل رقم (٢ - ١٥ - ج)، وتصبح الحالة في الشكل (٢ - ١٥ - أ) هي مكافئة للحالة في الشكل (٢ - ١٥ - ج).

٢-٦ - تمارين:

ت ١-٢ :

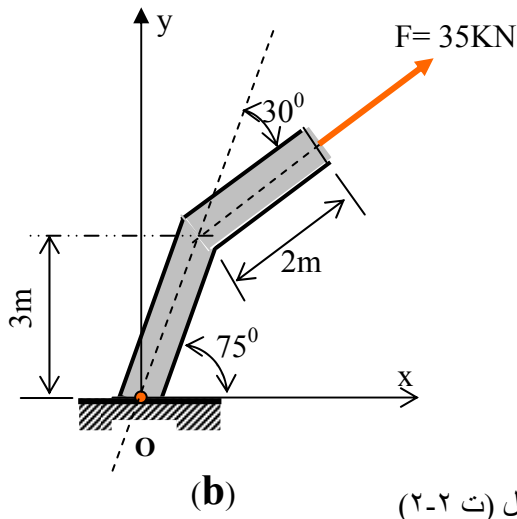
احسب عزم القوة $F = 10 \text{ KN}$ حول النقطة A بأربعة (4) طرق مختلفة.
[الجواب: $M_{F/A} = 53.3 \text{ kN.m}$]



شكل (ت ١-٢)

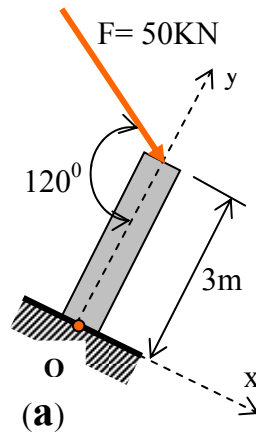
ت ٢-٢ :

في كل من الحالتين (a) و (b) في الشكل (ت ٢-٢)، احسب عزم القوة F حول النقطة O التي تمثل مركز المحاور X و Y ($M_{F/O}$).



(b)

شكل (ت ٢-٢)



(a)

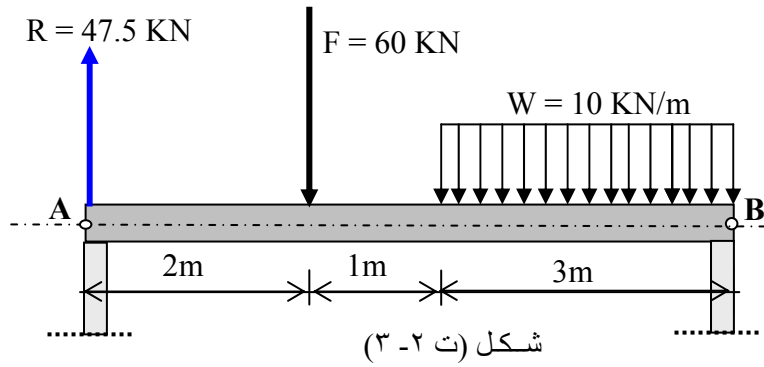
ت ٢-٣ :

الكمرة المبينة في الشكل (ت ٢ - ٣) واقعة تحت تأثير مجموعة قوى:

أ - احسب عزم مجموعة القوى حول النقطة A.

ب - احسب عزم مجموعة القوى حول النقطة B.

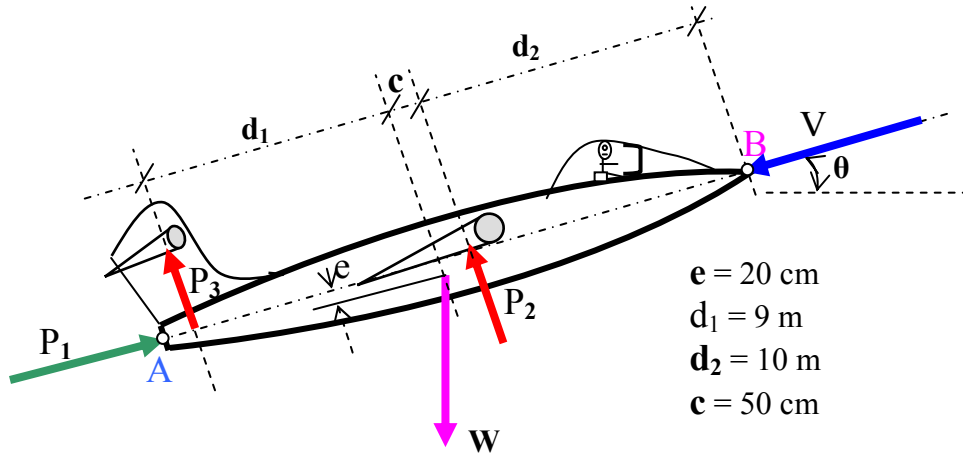
[الجواب: $M_B = 0, M_A = 255 \text{ kN.m}$]



ت ٢-٤ :

تعلو وتدور الطائرة النفاثة المبينة على الشكل (ت ٢ - ٤) بميل زاويته 10 درجات وبسرعة ثابتة تحت تأثير القوى التالية:

- وزن الطائرة ووزن جميع الأشخاص والأمتعة والمعدات التي تحملها : $W = 400 \text{ kN}$
- قوة دفع منتظمة مقدارها $P_1 = 700 \text{ kN}$
- قوة الدفع P_2 التي تؤثر على الأجنحة في اتجاه عمودي على محور الطائرة: $P_2 = 270 \text{ kN}$
- قوة الدفع P_3 التي تؤثر على الذيل في اتجاه عمودي على محور الطائرة: $P_3 = 220 \text{ kN}$
- قوة مقاومة الهواء V التي تؤثر في اتجاه محور الطائرة : $V = 350 \text{ kN}$.
- ١- احسب عزم مجموعة القوى المؤثرة على الطائرة حول النقطة A.
- ٢- احسب عزم مجموعة القوى المؤثرة على الطائرة حول النقطة B.

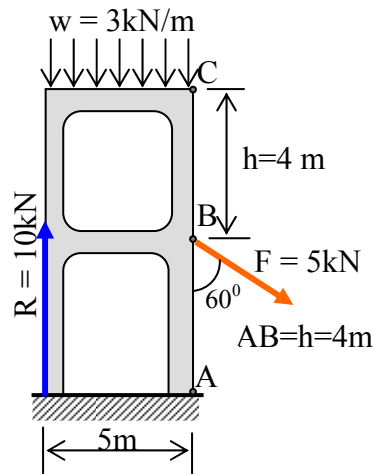


شكل (ت ٢-٤)

ت ٢-٥ :

يتعرض الهيكل المبين في الشكل (ت ٢-٥) إلى مجموعة قوى والمطلوب:

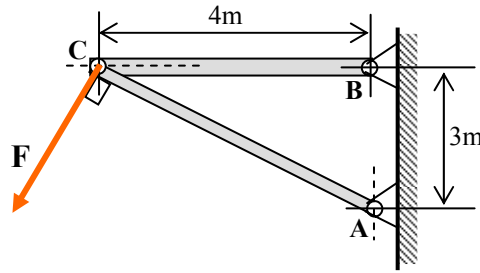
- ١ - حساب عزم مجموعة القوى حول النقطة A.
- ٢ - حساب عزم مجموعة القوى حول النقطة B.
- ٣ - حساب عزم مجموعة القوى حول النقطة C.



شكل (ت ٢-٥)

٢-٦ :

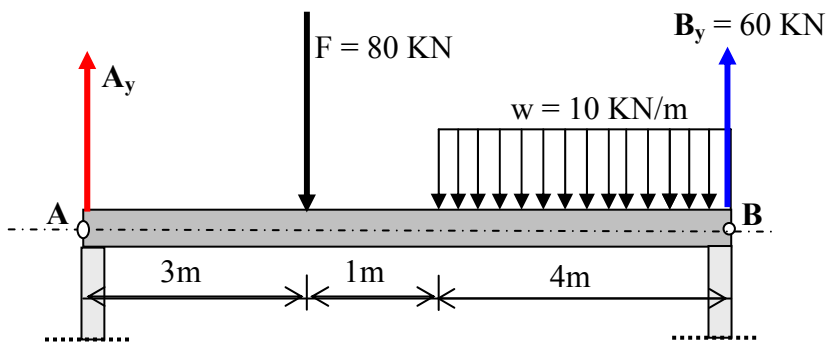
- يتعرض الحامل (ABC) إلى قوة $F = 500\text{N}$ متعامدة مع العنصر CA.
- ١- احسب عزم القوة F حول النقطة A .
 - ٢- احسب عزم القوة F حول النقطة B .



شكل (٦-٢)

٢-٧ :

- الكمرة المبينة في الشكل (٢-٧) واقعة تحت تأثير مجموعة قوى. أوجد قيمة القوة A_y بحيث يكون محصلة عزم جميع القوى حول النقطة B يساوي صفرا.
- [الجواب: $A_y = 60\text{ kN}$]



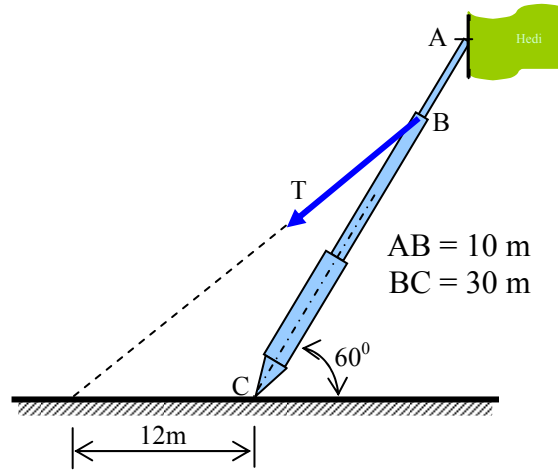
شكل (٢-٧)

ت ٨-٢ :

لرفع سارية علم من الوضع الموضَّح في الشكل (ت ٨-٢) يجب أن يولد الشد في حبل السارية عزما حول النقطة C مقداره $M_{T/C} = 72 \text{ kN.m}$.

احسب قيمة قوّة الشد T .

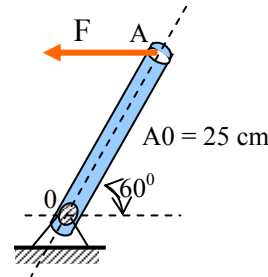
الجواب : $T = 8.65 \text{ KN}$



شكل (ت ٨-٢)

ت ٩-٢ :

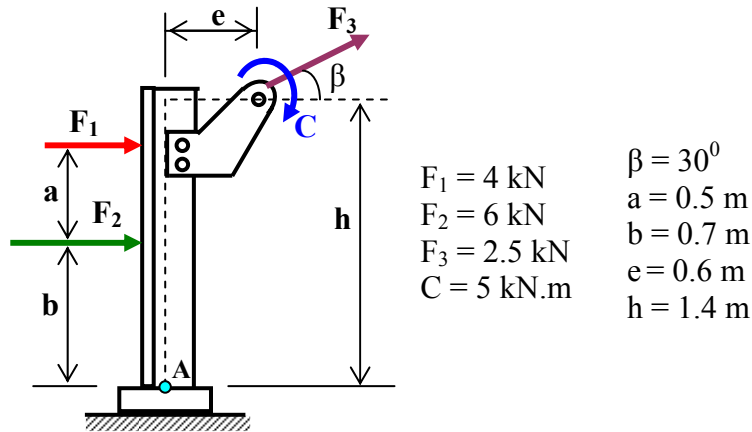
استبدل القوّة الأفقيّة $F = 100 \text{ N}$ المسلّطة على العتلة بنظام مكافئ مكوّن من قوّة في نقطة O وعزم إزدواج حسب الشكل (ت ٩-٢).



شكل (ت ٩-٢)

ت ١٠-٢ :

في الشكل (ت ١٠ - ٢) استبدل القوى الثلاثة وعزم الازدواج C بقوة مكافئة R تمر بالنقطة A وعزم ازدواج M.



شكل (ت ١٠ - ٢)

مبنى المنظمة العالمية للرصد الجوي بجنيف - سويسرا.

