بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة وادي النيل–كلية الهندسة والتقنية

قسم الهندسة الميكانيكية

برنامج بكلاريوس الشرف في الهندسة الميكانيكية

الفصل الدراسي الثامن

التصميم بمساعدة الحاسوب

إعداد:

الأستاذ/أسامة محمد المرضي

بسم الله الرحمن الرحيم

اسلوب العنصر المحدد *(F.E.M)*

(Finite Element Method)

1/ مقدمة :- (Introduction)

هو الأسلوب المباشر لحساب التفاوتات للوصول إلى الحل التقريبي للمسائل المتصلة المعقـــدة (الحلـــول التقريبية للمعادلات التفاضلية العادية والجزئية).

وهذا يتم بتحويل المسائل المتصلة المعقدة (continuum) بدرجة حريتها اللانهائية الى مســائل بديلــة لــها درجة حرية محددة خواصها قريبة من النموذج الاصلي.

يستخدم اسلوب العنصر المحدد لحل المسائل ذات الشكل الهندسي المعقد التــــي لا يمكــن حلــها بالاســاليب التحليلية القياسية . ولكن عندما يكون الشكل الهندسي المراد حساب التفاوتات فيه معقداً فانّ المهمـــة تصبـــح اكثر تعقيداً وصعوبة . في طريقة العناصر المحددة يمكن تفادي هذه المصاعب بتخيل ان الجســـم المصمـــت المراد اجراء هذه الطريقة عليه يمكن تقسيمه الى عدد من التقسيمات المحددة لتسهيل حله.

2/ الفكرة الاساسية لاسلوب العنصر المحدد :-

افترض انه يُراد ايجاد توزيع درجة الحرارة للحالة المستقرة في لوحة . الفكرة الاساســـية هـــي تقســـيم الشكل الهندسي للوحة الى عقد (nodes) وعناصر (elements).

من بعد يتم افتراض ان مجال درجة الحرارة يتفاوت بصيغة بسيطة خلال اىّ عنصـــر محـّــدد (عـــادة يتـــم استخدام التفاوت الخطي او متعدد الحدود الثنائي لاستكمال مجال المتغير) . يقود اجراء التقسيم هـــذا لنظـــام معادلات جبرية خطية يمكن حلها بسهولة على حاسوب رقمي .

3/ فحص جبر المصفوفات :- (Review of Matrix algebra)

يتم تعريف المصفوفة كصفوف واعمدة mxn من الأعداد ، حيث :

m = عدد الصفوف

n = عدد الأعمدة

يُرمز لعنصر من المصفوفة كـــ A_{ij} حيث :

i = صف

j = عمود

A_{ij} هو العنصر او العدد الذي يحتل الصف i والعمود j

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & .... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & .... & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & .... & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & .... & A_{mn} \end{bmatrix}$$

تُسمى المصفوفة مصفوفة مربعة $(Square\ matrix)$ إذا كان $m = n$. إذا كان m =1 تُسمى المصفوفة مصفوفة صف ، واذا كان n =1 تُسمى المصفوفة مصفوفة عمود او متجه .

ترميز :- $(Notation)$

$\underline{A}$: مصفوفة (حروف كبيرة)

$\underline{a}$: متجه (حروف صغيرة)

C: قياسي (ليس تحته خط)

الضرب بواسطة مقدار قياسي (Multiplication by a scalar) :-

اذا كان $\underline{C} = \alpha \underline{A}$ ، بالتالي $C_{ij} = \alpha A_{ij}$

تحوير المصفوفة $(Transpose\ of\ a\ martrix)$:-

يتم الحصول على تحوير مصفوفة بتبادل الصفوف والاعمدة .

مثال :-

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$2 \times 3$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$3 \times 2$$

اذا كان $\underline{A} = \underline{A}^T$ ، بالتالي فانّ $\underline{A}$ يقال عنها مصفوفة متماثلة . $(symmetric)$.

فقط تكون المصفوفات المربعة متماثلة .

<u>جمع المصفوفات</u> : (matrix addition):-

اذا كان $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$ ، بالتالي فان $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$.

يتم تعريف جمع المصفوفة عاليه عندما يكون $\underline{C}$, $\underline{A}$, $\underline{B}$ جميعها بنفس الرتبة $i.e.$ جميعها له نفس عدد الصفوف والاعمدة .

$$\frac{C}{m \times n} = \frac{A}{m \times n} + \frac{B}{m \times n}$$

حاصل ضرب المتجه القياسي : (*vector scalar product*)

حاصل ضرب متجهيين $\underline{a}$, $\underline{b}$ يكون مقداراً قياسيا α

$$\underline{a}.\underline{b} = \underline{a}^T\,\underline{b} = b^T a = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$$

مثال :-

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}^T\,\underline{b} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 12 + 0 + 2 = \underline{\underline{14}}$$

ضرب المصفوفة : (matrix multiplication)

اجعل $\underset{m\times n}{C} = \underset{m\times q}{A}\;\underset{q\times n}{B}$

بالتالي $C_{ij} = \sum_{k=1}^{q} A_{ik} B_{kj}$

يتم تعريف حاصل ضرب المصفوفة عندما يكون عدد الاعمدة في $\underline{A}$ مساوٍ لعدد الصفوف في $\underline{B}$.

مثال :-

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{AB} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

عموما ، يكون ضرب المصفوفة غير قابل للتبديل $i.e.$

$$\underline{AB} \neq \underline{BA}$$

وضّح انّ : $(\underline{A}\,\underline{B})^T = \underline{B^T\,A^T}$

مصفوفة الوحدة :- (unit or identity matrix)

المكونّات δ_{ij} لمصفوفة الوحدة I يتم تعريفها كـــ

$$\delta_{ij}\begin{cases} 0 & if \quad i \neq j \\ 1 & if \quad i = j \end{cases}$$

δ_{ij} تُسمى بدلتا كرونيكر(kronecker delta)

$$\underset{3\times3}{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0. \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\,\underline{I} = \underline{I}\,\underline{A} = \underline{A}$$

محدّدة المصفوفة : (Determinant of a matrix)

يتم ترميز محددة مصفوفة $\underline{A}$ كـــ $\det(\underline{A})$ (يجب ان تكون $\underline{A}$ مصفوفة مربعة)

$$\underline{\det(A)} = \sum_{j=1}^{n} Aij\ Cij$$

حيث C_{ij} هو العامل المرافق (cofactor) لـــ A_{ij}

معكوس المصفوفة : (Inverse of a matrix)

يتم تعريف معكوس مصفوفة بحيث ان حاصل ضرب مصفوفة A ومعكوسها A^{-1} ينتج مصفوفة وحدة .

$$\underline{A}\,\underline{A}^{-1} = I = \underline{A}^{-1}\,\underline{A}$$

فقط يكون هنالك معكوسا للمصفوفة المربعة . معكوسة المصفوفات الصغيرة (كمثال حتـــــى الرتبــة 3×3) يمكن تحديده بالصيغة التالية ،

$$\underline{A}^{-1} = \frac{\underline{C}^{T}}{\det(\underline{A})}$$

حيث $\underline{C}^{T}$ هو تحوير مصفوفة العامل المرافق $\underline{A}$.

المعادلات الجبرية الخطية : (Linear algebraic equation)

هى نظم لمعادلات تظهر فيها القيم الغير معلومة خطيا و لا يكون هنالك عوامل تفاضلية او تكاملية .

مثال :-

$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -2$$
$$2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1$$
$$4x_2 + x_3 = 3$$

المعادلات الثلاث عاليه يمكن كتابتها كمصفوفة كالآتي :-

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$$

مثال : أوجد الحل للنظام $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$

الحل : اضرب مسبقا بـــ A^{-1}

$$\underset{3\times 3}{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0. \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\,\underline{I} = \underline{I}\,\underline{A} = \underline{A}$$

محدَّدة المصفوفة : (Determinant of a matrix)

يتم ترميز محددة مصفوفة A كـــ det (A) (يجب ان تكون A مصفوفة مربعة)

$$\underline{\det(A)} = \sum_{j=1}^{n} Aij\ Cij$$

حيث C_{ij} هو العامل المرافق (cofactor) لــ A_{ij}

معكوس المصفوفة : (Inverse of a matrix)

يتم تعريف معكوس مصفوفة بحيث ان حاصل ضرب مصفوفة A ومعكوسها A^{-1} ينتج مصفوفة وحدة .

$$\underline{A}\,\underline{A}^{-1} = I = \underline{A}^{-1}\,\underline{A}$$

فقط يكون هنالك معكوسا للمصفوفة المربعة . معكوسة المصفوفات الصغيرة (كمثال حتـــــى الرتبـــة 3×3)
يمكن تحديده بالصيغة التالية ،

$$\underline{A}^{-1} = \frac{\underline{C}^{T}}{\det(\underline{A})}$$

حيث $\underline{C}^{T}$ هو تحوير مصفوفة العامل المرافق $\underline{A}$.

المعادلات الجبرية الخطية : (Linear algebraic equation)

هى نظم لمعادلات تظهر فيها القيم الغير معلومة خطيا ولا يكون هنالك عوامل تفاضلية او تكاملية .

مثال :-

$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -2$$
$$2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1$$
$$4x_2 + x_3 = 3$$

المعادلات الثلاث عاليه يمكن كتابتها كمصفوفة كالآتي :-

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$$

مثال : أوجد الحل للنظام $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$

الحل : اضرب مسبقا بــ A^{-1}

$$\underline{A}^{-1}\,\underline{A}\,x=\underline{A}\,\underline{b}$$

$$\underline{I}\,\underline{x}=\underline{A}^{-1}\,\underline{b}$$

$$\Longrightarrow \qquad \underline{x}=\underline{A}^{-1}\underline{b}$$

الصيغ التربيعية : (Quadratic forms)

اذا كانت $\underline{A}$ مصفوفة مربعة و x متجه (بنفس عدد الصفوف كـ $\underline{A}$) ، بالتالي فان المقدار القياسي الناتج

$$\alpha=\underset{1\times n}{x^{T}}\;\underset{\substack{1\times 1\\ n\times n}}{A}\;\underset{n\times 1}{x}$$

يسمى بالصيغة التربيعية . يُقال ان المصفوفة A تكون :

1/ محددة ايجابيا اذا كانت $\alpha>0$ لكل قيم $\underline{x}\neq 0$

2/ شبة محددة ايجابيا اذا كانت $\alpha\geq 0$ لكل قيم $\underline{x}\neq 0$

اذا كانت A محددة ايجابيا (positive definite)، بالتالي فان لها معكوسا ، و$\det(\underline{A})\neq 0$

تفاضل وتكامل المصفوفات :

(Differentiation and Integration of matrices)

افترض ان مكونات مصفوفة $\underline{A}$ هي دوال للمتغير x . تكامل المصفوفة $\underline{A}$ هي مصفوفة بنفس الرتبة كـ A والتي يتم الحصول على مكوناتها بتكامل اى مكونة لـ $\underline{A}$ على انفراد . وبالمثل ، فان مشتقة المصفوفة $\underline{A}$ هي مصفوفة بنفس الرتبة كـ $\underline{A}$ والتي يتم الحصول على مكوناتها بتفاضل اى مكونة لـ $\underline{A}$.

مثال :-

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}2x & 0 & x\\ 3 & x^{2} & x^{3}\\ x & x^{3} & 2x\end{bmatrix}$$

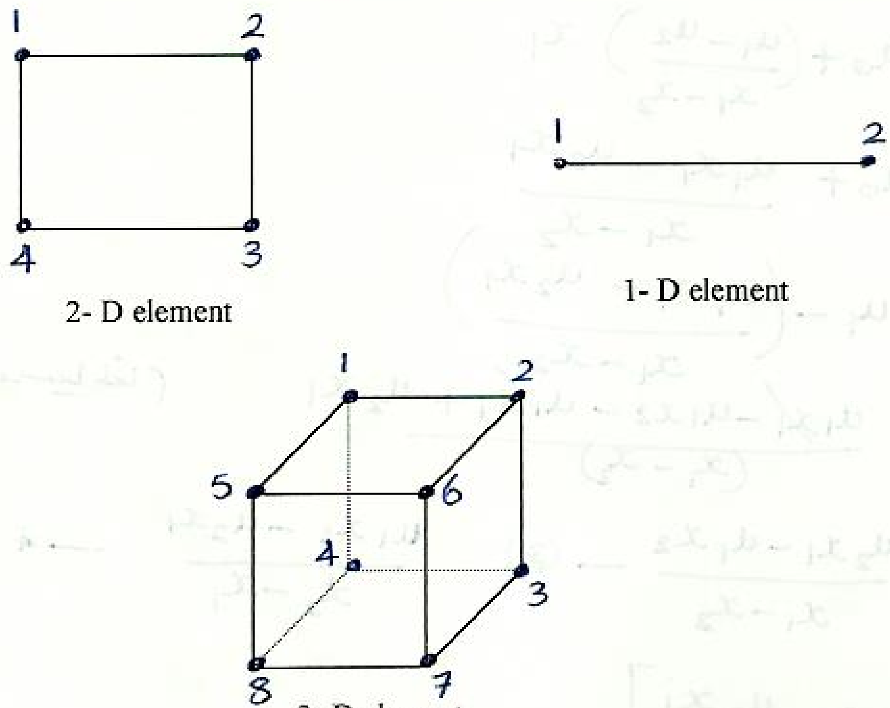
$$\frac{d\underline{A}}{dx}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2x & 3x^{2}\\ 1 & 3x^{2} & 2\end{bmatrix}$$

$$\int_{-1}^{1}\underline{A}\,dx=\begin{bmatrix}\int_{-1}^{1}2x\,dx & \int_{-1}^{1}0\,dx & \int_{-1}^{1}x\,dx\\ \int_{-1}^{1}3\,dx & \int_{-1}^{1}x^{2}\,dx & \int_{-1}^{1}x^{3}\,dx\\ \int_{-1}^{1}x\,dx & \int_{-1}^{1}x^{3}\,dx & \int_{-1}^{1}2x\,dx\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 6 & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

4/ خطوات اسلوب العنصر المحدد :- (procedure of finite element method)

4.1/ التقسيم : (Discretization):-

يقصد به تقسيم نطاق الحل الى عناصر محددة . هذه العناصر قد تكون ذات بعد واحد او بعدين او ثلاثة اعتمادا على المسألة التي بايدينا (شكل رقم (1)) . تسمى النقاط التي تحد العنصر بالعقد (nodes). سيتم التعامل في هذه الدراسة بعنصر ذو بعد واحد .



2- D element

1- D element

3- D element

شكل رقم (1)

4.2/ معادلة العنصر (Element equation):

يتم تكوين معادلات لافتراض شكل الحل لكل عنصر على حده . هذا الاجراء يتم على مرحلتين هما :

(1) اختيار دالة تقريبية لها معاملات مجهولة القيم.

(2) تحديد قيم لهذه المعاملات لإيجاد الحل لعنصر واحد .

في المرحلة (1) يتم اختيار دوال متعددة الحدود (polynomials). مثلا لعنصر ذو بعد واحد تكون الدالة من الرتبة الاولى (معادلة خط مستقيم) اى ان :

$$u(x) = a_0 + a_1 x \longrightarrow (1)$$

حيث u(x) هى المتغير التابع ، a_1, a_0 هى معاملات مجهولة القيم ، x هي المتغير المستقل . بالاشارة للشكل رقم (2) ، تكتب المعادلة (1) لطرفي العنصر كلاتي :

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= a_0 + a_1 x_1 \\ u_2 &= a_0 + a_1 x_2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow (2)$$

حيث $u_1 = u(x_1)$ ، و $u_2 = u(x_2)$.

$$u(x) = a_0 + a_1 x \quad \text{——— (1)}$$

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= a_0 + a_1 x_1 \\ u_2 &= a_0 + a_1 x_2 \end{aligned}\right] \text{——— (2)}$$

بطرح المعادلتين (2)

$$u_1 - u_2 = a_1 x_1 - a_1 x_2 = a_1 (x_1 - x_2)$$

$$\therefore a_1 = \frac{u_1 - u_2}{x_1 - x_2} \quad \text{——— (3)}$$

بالضرب في (-1) للبسط والمقام

$$a_1 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \quad \text{——— *}$$

تعويض a_1 في u_1 (المعادلة (2))

$$u_1 = a_0 + \left(\frac{u_1 - u_2}{x_1 - x_2}\right) x_1$$

$$u_1 = a_0 + \frac{u_1 x_1 - u_2 x_1}{x_1 - x_2}$$

$$a_0 = u_1 - \left(\frac{u_1 x_1 - u_2 x_1}{x_1 - x_2}\right)$$

بتوحيد المقام

$$a_0 = \frac{u_1 \cancel{x_1} - u_1 x_2 - u_1 \cancel{x_1} + u_2 x_1}{(x_1 - x_2)}$$

$$a_0 = \frac{u_2 x_1 - u_1 x_2}{x_1 - x_2} \quad \text{— (3)} \qquad \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{— *}$$

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1} \\ a_1 &= \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}\right] \text{——— (3)}$$

بتعويض المعادلة (3) في (1)

$$u(x) = \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1} + \left(\frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}\right) x$$

$$u(x) = \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1 + u_2 x - u_1 x}{x_2 - x_1}$$

$$u(x) = \frac{u_1 x_2 - u_1 x + u_2 x - u_2 x_1}{x_2 - x_1} = \frac{u_1 (x_2 - x) + u_2 (x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore u(x) = u_1 \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\right) + u_2 \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)$$

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 \quad \text{—— (4)}$$

$$u = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{—— (5)}$$

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \\ N_2 &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}\right] \text{—— (6)}$$

shape functions

يمكن حل المعادلة (2) لتحديد a_0 , a_1 كما يلي :

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1} \\ a_1 &= \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}\right\} \longrightarrow (3)$$

بتعويض المعادلة (3) في المعادلة (1)

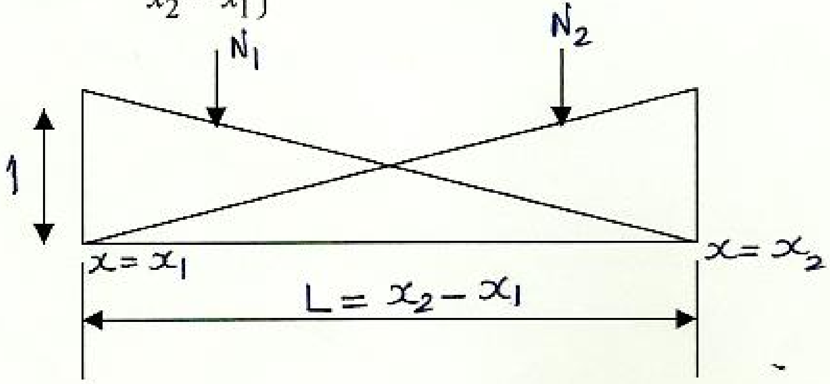
$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 \longrightarrow (4)$$

او في شكل مصفوفة :

$$u = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \longrightarrow (5)$$

حيث N_1 , N_2 تسميان بدوال الشكل (shape functions) وهما :

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \\ N_2 &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}\right\} \longrightarrow (6)$$



شكل رقم (2)

$N_i = a_i + b_i x$ —(7)
عندما $i=1$
$N_1 = a_1 + b_1 x$
at $x = x_1 = 0$
$N_1 = a_1 + b_1 x_1$
$1 = a_1 \quad \therefore a_1 = 1$
at $x = x_2$
$N_1 = a_1 + b_1 x_2$
$0 = a_1 + b_1 L$
$b_1 L = -a$
$\therefore b_1 = -\frac{a}{L} = \frac{-1}{L}$

من المعادلة (6) ، عندما $x = x_1$:

$$N_1 = 1$$
$$N_2 = 0$$

وعندما $x = x_2$:

$$N_1 = 0$$
$$N_2 = 1$$

ايضا يمكن وضع N_2, N_1 في صورة دالة متعددة الحدود ،

$$N_i = a_i + b_i x \longrightarrow (7)$$

قيم a_i , b_i تعتمدان على رتبة العنصر وشروطه الحدية . مثلا للعنصر الاول :

$$x_2 = L \quad , \quad x_1 = o$$

عندما $i = 1$: $a_1 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{L}$

عندما $i = 2$: $a_2 = 0$, $b_2 = \frac{1}{L}$

ويعطي

حيث L هو طول العنصرا بالعلاقة : $L = x_2 - x_1$

بالتعويض في المعادلة (7) ،

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{L} \\ N_2 &= \frac{x}{L} \end{aligned}\right\} \longrightarrow (8)$$

بهذه الطريقة يمكن ايجاد دالة الشكل لاي عنصر . الجدول رقم (1) ادناه يبين قيم a_i , b_i للاربع عنـــاصر الاولى عندما تكون متساوية الطول .

b_2	b_1	a_2	a_1	العنصر
$1/L$	$-1/L$	0	1	1
$1/L$	$-1/L$	-1	2	2
$1/L$	$-1/L$	-2	3	3
$1/L$	$-1/L$	-3	4	4

جدول رقم (1)

يلاحظ من الجدول رقم (1) اعلاه ان القيم العمومية لهذه الثوابت هي :

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= n \\ a_2 &= 1 - n \\ b_1 &= -\frac{1}{L} \\ b_2 &= \frac{1}{L} \end{aligned}\right\} \longrightarrow (9)$$

$N_i = a_i + b_i x$ —— (7)

حيث n هى رتبة العنصر .

بتعويض المعادلة (9) في المعادلة (7) ،

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= n - \frac{x}{L} \\ N_2 &= (1-n) + \frac{x}{L} \end{aligned}\right\} \longrightarrow (10)$$

بتفاضل المعادلة (10) ،

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN_1}{dx} &= -\frac{1}{L} \\ \frac{dN_2}{dx} &= \frac{1}{L} \end{aligned}\right\} \longrightarrow (11)$$

معادلات العناصر الناتجة تتكون من مجموعة معادلات جبرية خطية يمكن وضعها على هيئة معادلة مصفوفة كالآتي :

35 — 23

51 — 40

$$[k][u]=[m] \longrightarrow (12)$$

حيث $[k]$ هي مصفوفة كزازة العنصر (element stiffness matrix)، و $[u]$ هي مصفوفة من عمود واحد بها الكميات المراد تحديدها و $[m]$ هي مصفوفة الكتلة للعنصر (element mass matrix) وهي ايضا من عمود واحد.

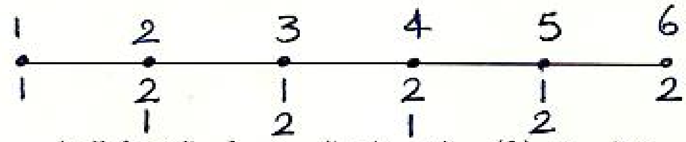
4.3/ التجميع (Assembly):-

هى عملية لربط معادلات العناصر لتحديد السلوك الموحد للنظام ككل ،ويراعى فيه مبدأ الاستمرار ، اى ان نهاية عنصر هى بداية لعنصر جديد . تعرف احداثيات عقد كل عنصر على حدة بالاحداثيات الموضعية (local co-ordinates)واحداثيات عقد النظام بالكامل بالاحداثيات الكونية (Global co-ordinates) الشكل رقم (3) ادناه يوضح هاتين التسميتين .

بعد عملية التجميع يتم الحصول على معادلة المصفوفة الكونية كما يلي :

$$[k][u']=[M] \longrightarrow (13)$$

حيث $[k]$ هي مصفوفة الكزازة ، $[u']$ هي مصفوفة من عمود واحد بها الكميات المراد تحديدها للنظام كله، و $[M]$ هي مصفوفة الكتلة للنظام و هي ايضا من عمود واحد.



شكل رقم (3) ، التسميتان الموضعية والكونية للعناصر

4.4 الشروط الحدودية : (Boundary conditions)

قبل حل المعادلة (13) يجب تعديلها لتستوعب الشروط الحدودية لنطاق الحل . هذه الشروط الحدودية تمثل قيم الحل في بداية العنصر الاول ونهاية العنصر الاخير . هذه التعديلات تقود للمعادلة :

$$[\bar{k}][\overline{u'}]=[\overline{M}] \longrightarrow (14)$$

4.5 يتم حل المعادلة (14) لايجاد قيم المجاهيل في المصفوفة $[u']$ بعدة طرق ، منها تفكيك معادلة المصفوفة الى معادلات آنية ثم حلها .تستخدم هذه الطريقة عندما يكون عدد العناصر بسيطا (اقل من 5 مثلا) . اما في حالة ان يكون عدد العناصر كبيرا ، فلابد من استخدام الحاسوب في الحل.يستخدم الحاسوب لايجاد مقلوب مصفوفة الكزازة وضربه في مصفوفة الكتلة . اى انّ

$$[\overline{u'}]=[\bar{k}]^{-1}[\overline{M}] \longrightarrow (15)$$

حل مسائل تحليل الاجهادات باستخدام اسلوب العناصر المحددة :

يمكن تلخيص خطوات الحل في خمس خطوات اساسية :-

5.1/ تعريف شبكة العناصر المحددة (Definition of the finite element mesh) :

اعتمادا على المسألة التي بايدينا ، سيكون من المناسب تمييزها كخط او ذات بعدين او ذات ثلاث ابعاد.

5.2/ اختيار نموذج الازاحة : (selection of the displacement model)

يجب ان تقابل الدالة التى يتم اختيارها لوصف نموذج الازاحة لعنصر ما احكاما معينة :

أ/ عدد الاصطلاحات او العناصر في المتسلسلة : (No of terms in the series)

عدد الاصطلاحات او العناصر في المتسلسلة التي يتم اختيارها يجب ان يساوى العدد الكلي لدرجة الحرية (i.e. الازاحة العقدية (nodal displacement)، الدوران (rotation)، ، الانفعال (strain)).

ب/ الانسجام (compatibility) :-

الدالة التقريبية وبعض مشتقاتها التفاضلية يجب ان تكون متصلة خلال العنصر ويجب ان يكون هنالك انسجام بين العناصر المتجاورة .

الجسم الجاسئ (rigid body)هو نموذج الازاحة البسيط (ليس به انفعال) يليه في البساطة نموذج ثابت الانفعال ، وعليه فان الداله التي يتم اختيارها يجب ان تكون قادرة على تمثيل هذين الشرطين .

هذا يتضمن ان تمثيل متسلسلة القدرة يجب ان يبدأ بثوابت (constants) واصطلاحات خطية (linear terms).

5.3/ صياغة معادلة الكزازة المتقطعة : (Formulating the discrete stiffness equation):

على اساس نموذج الازاحة المفترض Q فان توزيع الانفعال خلال العنصر الفردي وتبعا لذلك طاقة الوضع الكلية للتقريب المتقطع يمكن تحديدها من

$$V = U + \Omega = \sum\left(U^{e} + \Omega^{e}\right) \longrightarrow (a)$$

حيث، V = طاقة الانفعال الكلية .

U= طاقة الانفعال للعنصر.

Ω= طاقة الانفعال للاحمال المسلطة .

او $V = v(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) \longrightarrow (b)$

حيث $a_1, a_2, ..., a_n$ هي احداثيات الازاحة .

بوضع الشرط $dv = 0$ للاتزان فان ذلك يقود لمعادلة الكزازة التالية :

$$[k][a] = [Q] \longrightarrow (c)$$

5.4/ حل معادلات الكزازة : (solution of the stiffness equation)

يتم حل المعادلة (C) بالطريقة المعيارية للمصفوفات الجبرية ـ $[k]$ تكون متماثلة وغالبا العديد من عناصرها يساوي صفر .

المصفوفة المتماثلة (symmetric matrix):

مصفوفة (n× n) تسمى متماثلة اذا كانت $A^T = A$

كمثال : $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ ؛ $A^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix} = A$

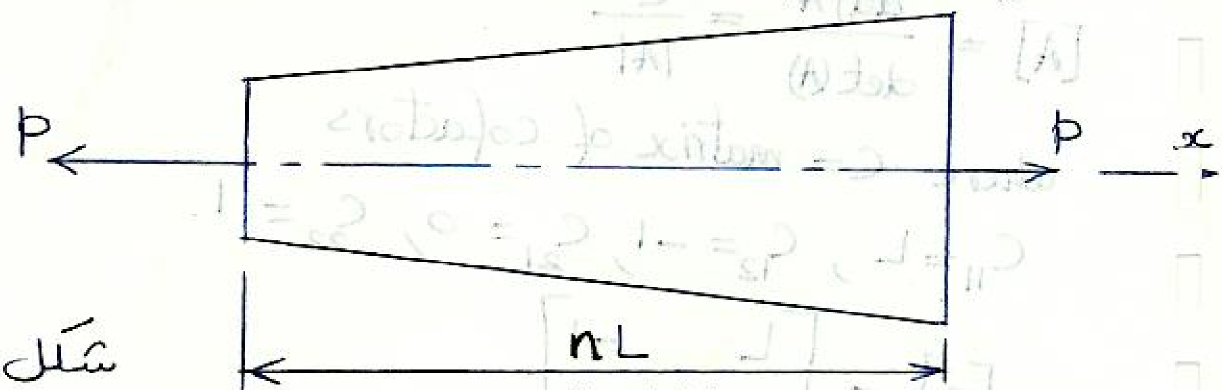
5.5/ تحديد انفعال واجهاد العنصر : (Determining the element strain and stress)

عندما يتم تحديد نموذج الازاحة فانه من السهولة بمكان حساب انفعال العنصر من نموذج الازاحة باستخدام علاقة الازاحة / الانفعال . ويمكن الحصول على الاجهادات عندها بواسطة قانون هوك (Hook`s law) .

6.0/ صياغة ازاحة العناصر المحددّة لقضيب معرض لحمل شد :

(Displacment finite element formulation for bar extension)

اعتبر قضيبا مسلوبا احادي محور الحمل كما موضح في الشكل رقم (4) ادناه

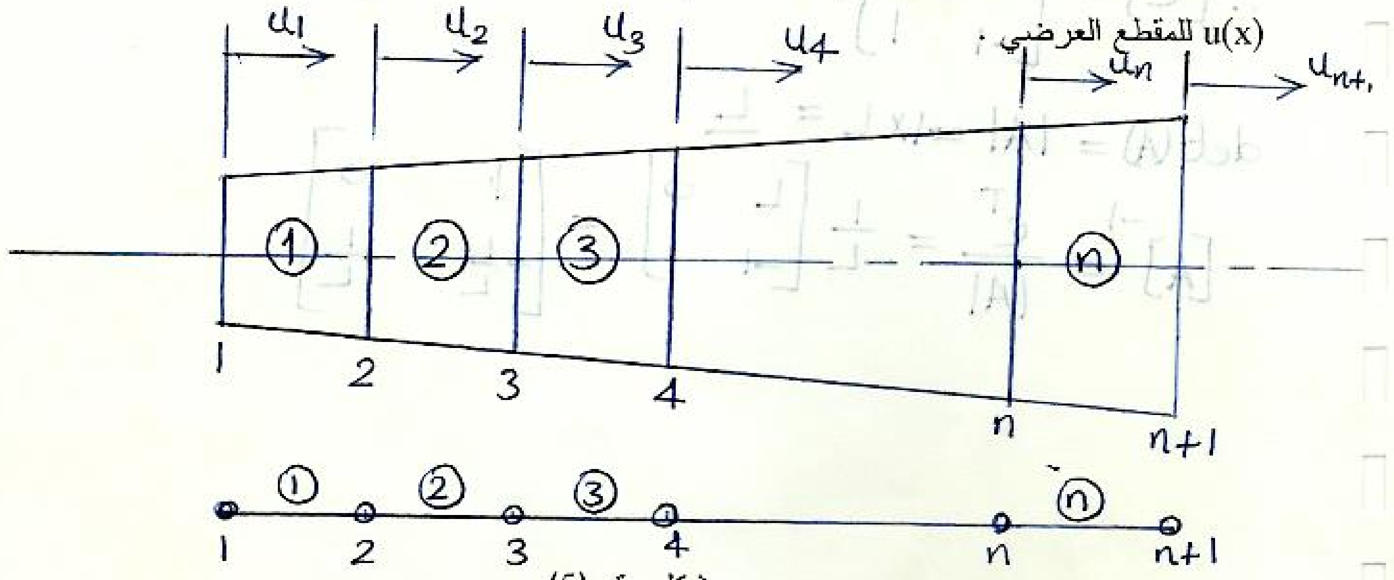


شكل رقم (4)

الخطوة الاولى هي تعريف شبكة العناصر المحددة :

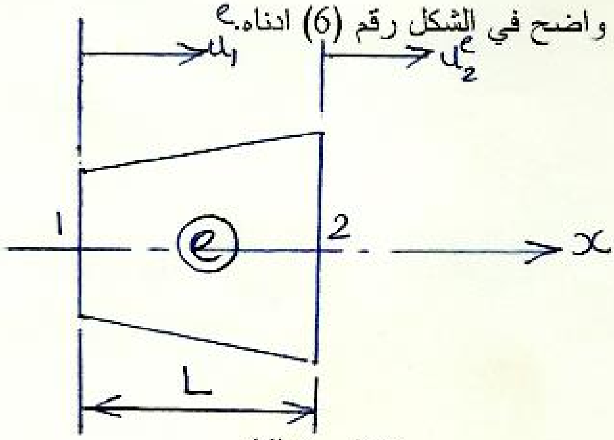
في هذه الحالة فان التقسيم هو ترتيب خطي للعناصر كما موضح في الشكل رقم (5) ادناه .

نعرف من ميكانيكا المواد ان التشوه (تغيير الشكل) باعتبار ان المسلوب قاسي يعتمد على الازاحة المحورية $u(x)$ للمقطع العرضي :



شكل رقم (5)

ناخذ عنصرا نموذجيا e ونعلم مواضع العقد الخارجية (External nodes)كـ 1 و 2 ، والاحداثي الموضعي للعنصر x كما هو واضح في الشكل رقم (6) ادناه.



شكل رقم(6)

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1} = \frac{\text{adj}\, A}{\det(A)} = \frac{C^T}{|A|}$$

where $C =$ matrix of cofactors

$$C_{11} = L, \; C_{12} = -1, \; C_{21} = 0, \; C_{22} = 1$$

$$\therefore [C] = \begin{bmatrix} L & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [C]^T = \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = 1 \times L = \underline{L}$$

$$[A]^{-1} = \frac{C^T}{|A|} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

وعلى القياس الموضعي ، فان تغيير الشكل (deformation) يتم تحديده بالازاحة العقدية للعنصر (element nodal displacement) $u_1{}^e$ و $u_2{}^e$.

الخطوة التالية هى اختيار نموذج ازاحة للعنصر . من دراستنا لميكانيكا المواد فاننا نعلم ان الانفعال يتفاوت على طول القضيب المسلوب بعلاقة لا خطية (non-liner fashion). وعليه فان دالة u يمكن كتابتها كالآتي :

$$u^e(x) = a_0 + a_1 x = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = [f(x)]\{a\} \longrightarrow (1)$$

بالرجوع للشكل رقم (6) عاليه وبوضع x = 0، و x =L يمكن كتابة المعادلة (1) كالاتي:

$$\begin{Bmatrix} u_1{}^e \\ u_2{}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} \longrightarrow (2)$$

ويمكن تبسيطها كالآتي :

$$\{u\}^e = [A]\{a\} \longrightarrow (3)$$

بجعل a موضع للقانون ،

$$\therefore \{a\} = [A]^{-1}\{u\}^e$$

بالتعويض في المعادلة (1) ،

$$u^e(x) = [f(x)]\,[A]^{-1}\{u\}^e \longrightarrow (4)$$

في هذه الحالة ،

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

من المعادلة (4) ،

$$u^e(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1{}^e \\ u_2{}^e \end{Bmatrix}$$

$$1\times\boxed{2 \qquad 2}\times 2$$

يمكن القول انّ ،

$$u^e(x) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1{}^e \\ u_2{}^e \end{Bmatrix} \longrightarrow (5)$$

او ; $u^e(x) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1{}^e \\ u_2{}^e \end{Bmatrix} \longrightarrow (6)$

الخطوة الثالثة هى الحصول على الانفعال وطاقة الانفعال للعنصر :

الانفعال , $\in = \dfrac{du^e}{dx} = \dfrac{dN}{dx}\{u\}^e = [B]\{u\} \longrightarrow (7)$

$$\text{الإنفعال}\ \epsilon = \frac{du^e}{dx} = \frac{dN}{dx}\{u\}^e = [B]\{u\} \text{———} (7)$$

في هذه الحالة ، $\in = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} \longrightarrow (8)$ ، الانفعال

من قانون هوك ، (From Hook`s law)

$$\sigma = E \in$$

حيث يمكن كتابة صورتها العامة كالاتي ،

$$\{\sigma\} = [E]\{\in\} \longrightarrow (9)$$

بما ان $\sigma = \frac{F}{A}$ ، $\in = \frac{\delta L}{\delta x}$

طاقة الانفعال ، $U = \frac{1}{2} F \delta L$

$$= \frac{1}{2}\sigma \in A\,dx = \frac{1}{2} E \in^2 A\,dx$$

يمكن كتابة طاقة الانفعال المختزنة في العنصر كالاتي :

$$U^e = \int \frac{1}{2} E \in^2 dV$$

$$= \int \frac{1}{2} \{\in\}^t [E]\{\in\} dV \longrightarrow (10)$$

من المعادلتين (7) و (10) ،

$$U^e = \int \frac{1}{2} [B]^t \{u^e\}^t [E][B]\{u^e\} dV$$

$$U^e = \frac{1}{2}\{u^e\}^t \left(\int [B]^t [E][B] dV \right) \{u\}^e \longrightarrow (11)$$

بتقييم حاصل ضرب المصفوفة واجراء التكامل نحصل على ،

$$U^e = \frac{1}{2}\{u^e\}^t [k]^e \{u\}^e \longrightarrow (12)$$

$$[k]^e = \int [B]^t [E] [B] dV \longrightarrow (13)$$

حيث $[k]^e$ = مصفوفة كزازة العنصر (Element stiffness matrix) وهي مصفوفة متماثلة بالرتبة (2×2)

طاقة الانفعال الكلية ، $U = \sum_e U^e \longrightarrow (14)$

اجعل ، $\{\tilde{u}\} = \{\{u\}^e\} = \begin{Bmatrix} \{u\}^1 \\ \{u\}^2 \\ \vdots \\ \{u\}^n \end{Bmatrix} \longrightarrow (15)$

$$[\tilde{k}] = \begin{bmatrix} k^1_{11} & k^1_{12} & 0 & 0 \\ k^1_{21} & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2_{11} & k^2_{12} \\ 0 & 0 & k^2_{21} & k^2_{22} \end{bmatrix} \quad \text{---- (16)}$$

Compatibility matrix

$$\begin{bmatrix} u^1_1 \\ u^1_2 \\ u^2_1 \\ u^2_2 \\ u^3_1 \\ u^3_2 \end{bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad \text{---- (18)}$$

local Displacements matrix

Global Displacement matrix

$$\{\tilde{u}\} = [C]\{u\} \quad \text{---- (19)}$$

وايضا اجعل ؛

$$\left[\tilde{k}\right]=\begin{bmatrix}[k]^1 & 0 & \cdots \\ 0 & [k]^2 & \cdots \\ & & \ddots \\ & & & [k]^n\end{bmatrix} \longrightarrow (16)$$

المعادلة (14) يمكن كتابتها كالاتي من المعادلة (15) والمعادلة (12) .

$$U=\tfrac{1}{2}\{\tilde{u}\}^t\left[\tilde{k}\right]\{\tilde{u}\} \longrightarrow (17)$$

والان عناصر $\{u\}^e$ هى ليست مطلقا مستقلة .

$$u_2{}^1=u_1{}^2=u_2$$
$$u_2{}^2=u_1{}^3=u_3$$
$$\vdots$$
$$etc$$

عليه يمكن كتابتها كالاتي :

$$\begin{Bmatrix}\{u\}^1\\ \{u\}^2\\ \vdots\\ \{u\}^n\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[C]^1\\ [C]^2\\ \vdots\\ [C]^n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{Bmatrix} \longrightarrow (18)$$

او $\{\tilde{u}\}=[c]\{u\} \longrightarrow (19)$

بالتعويض في المعادلة (17) ،

$$U=\tfrac{1}{2}\{u\}^t[C]^t\left[\tilde{k}\right][C]\{u\} \longrightarrow (20)$$

او $U=\tfrac{1}{2}\{u\}^t[k]\{u\} \longrightarrow (21)$

حيث , $k=[C]^t\left[\tilde{k}\right][C]$

والان ، طاقة الانفعال للاحمال المطبقة يمكن الحصول عليها من :

$$\Omega=-(-pu_1)-pu_{n+1} \longrightarrow (22)$$

عموما يمكن كتابتها كالاتي :

$$\Omega=-\{u\}^t[X] \longrightarrow (23)$$

$$\sigma = \frac{F}{A_{average}}$$

$$A_{average} = \frac{A_o + 2A_o}{2} = \frac{3}{2}A_o$$

$$\sigma = \frac{P}{\frac{3}{2}A_o} = \frac{2P}{3A_o} \text{ ——— } *$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{2P}{3EA_o} \text{ ——————— } *$$

حيث X = القوى المطبقة خارجيا (Externally applied forces)

طاقة الانفعال الكلية = طاقة الانفعال للعنصر + طاقة الانفعال للأحمال المطبقة

$$V=\frac{1}{2}\{u\}^{t}[k][u]-\{u\}^{t}[x] \longrightarrow (24)$$

للاتزان ، $\delta V=0$ ، عليه

$$\{\delta u\}^{t}\left([k]\{u\}-\{x\}\right)=0 \longrightarrow (25)$$

$$[k]\{u\}=\{x\} \longrightarrow (26)$$

هذه هى معادلة الاتزان المطلوبة للجسم التقريبي المجمع .

6.1/ مثال :- لعنصر قضيب مسلوب مسلط عليه حمل محوري فقط كما موضح في الشكل رقم (7) ادنـــاه ، وضح ان مصفوفة كزازة العنصر تعطى بالعلاقة التالية :

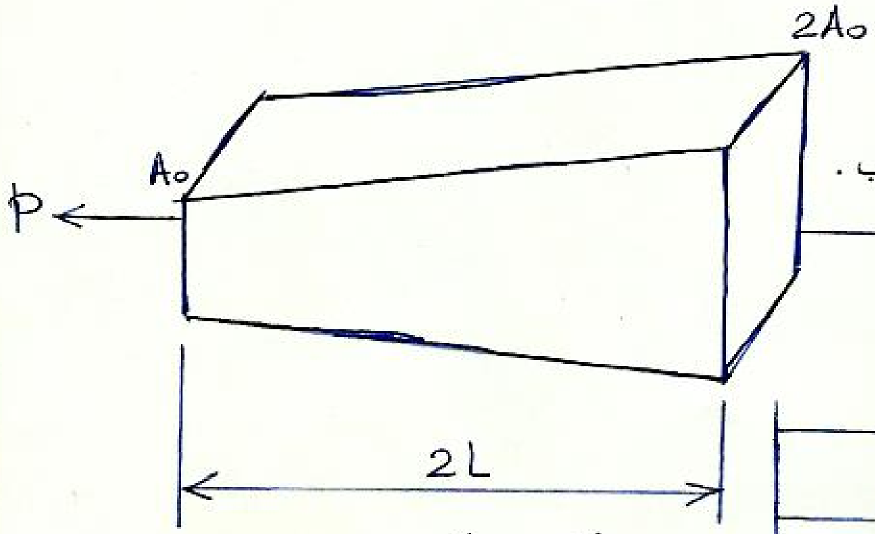
$$[k]^{e}=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

حيث E= معاير يونق للمرونة

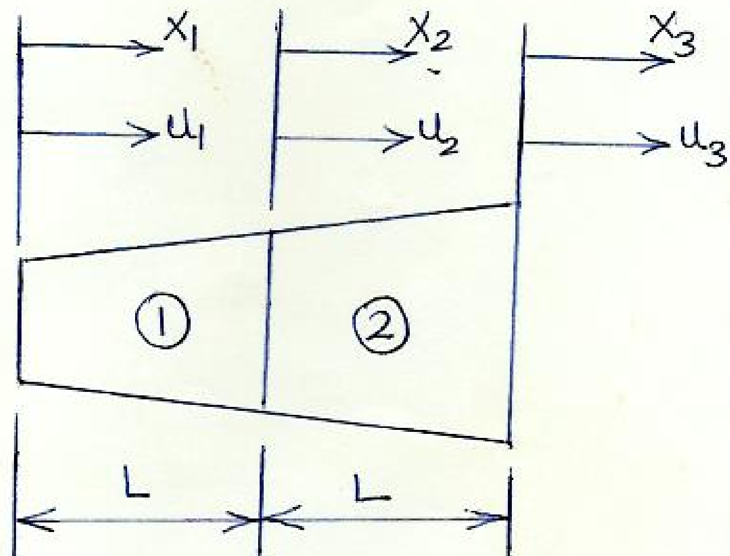
A= مساحة المقطع العرضي للعنصر

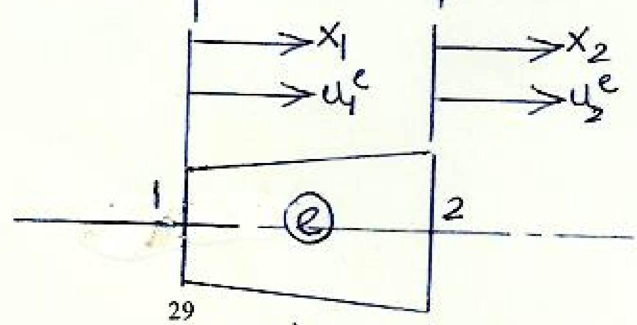
L= طول العنصر

ايضا احسب متوسط الانفعال والاجهاد للقضيب .



شكل رقم (7)





قسم القضيب الى عنصرين ،

افترض ان دالة الازاحة هي

$$u^e(x) = a_0 + a_1 x$$

او $$u^e(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} \longrightarrow (1)$$

عندما $x = 0$ ، و $x = L$

$$\begin{Bmatrix} u_1{}^e \\ u_2{}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1{}^e \\ u_2{}^e \end{Bmatrix}$$

او

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1{}^e \\ u_2{}^e \end{Bmatrix} \longrightarrow (2)$$

عوض عن المعادلة (2) في المعادلة (1) ،

$$u^e(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1{}^e \\ u_2{}^e \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1{}^e \\ u_2{}^e \end{Bmatrix}$$

او ; $$u^e(x) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1{}^e \\ u_2{}^e \end{Bmatrix} \longrightarrow (3)$$

الانفعال , $$\in = \frac{du^e(x)}{dx} = \frac{dN}{dx}\{u\}^e$$

$$= [B]\{u\}^e \longrightarrow (4)$$

$$\therefore\ \in = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1{}^e \\ u_2{}^e \end{Bmatrix}$$

من قانون هوك ،

$$[\sigma] = [E]\{\in\}$$

والان ، طاقة الانفعال المختزنة في العنصر يمكن اعطاؤها كالاتي :-

$$U^e = \int_0^L \frac{1}{2} E \in^2 dV$$

$$= \int \frac{1}{2}\{\in\}^t [E]\{\in\} dv \longrightarrow (5)$$

من المعادلتين (4) و (5) ،

$$U^e = \int \frac{1}{2}[B]^t \{u\}^{e^t} [E][B] \{u\}^e dv$$

$$U^e = \frac{1}{2} \{u^e\}^t \left(\int [B]^t [E][B]\, dv\right)\{u^e\} \longrightarrow (6)$$

باجراء التكامل نحصل على ،

$$U^e = \frac{1}{2}\{u^e\}^t [k]^e \{u\}^e \longrightarrow (7)$$

حيث $[k]^e$ هى مصفوفة كزازة العنصر

$$[k]^e = \int_0^L [B]^t [E][B]\, dv \longrightarrow (8)$$ بوضع

$$= \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} A\, dx$$

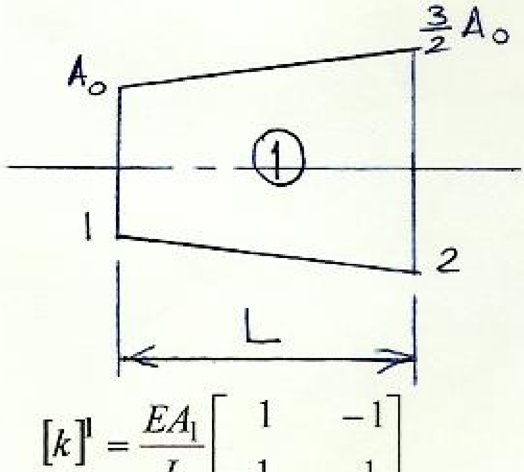
$$= \frac{E}{L^2} \int_0^L \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \{-1 \quad 1\} A\, dx$$

$$= \frac{EA}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} (x)_0^L$$

$$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow (9)$$

اعتبر العنصر (1) :-



$$[k]^1 = \frac{EA_1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k]^{asv} = \frac{EA_0}{4L}\left[\begin{array}{c|cc|c} 5 & -5 & 0 & 0 \\ \hline -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ \hline 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right]$$

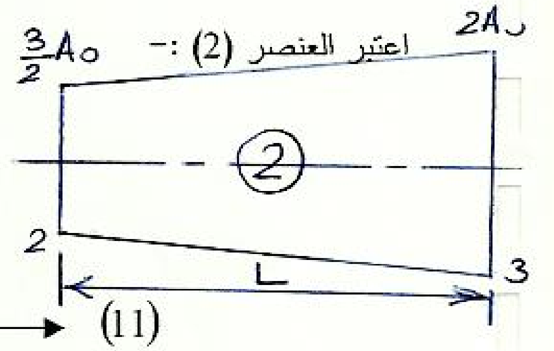
$$= \frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -5 & 12 & -7 \\ 0 & -7 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{———} (13)$$

مساحة المقطع العرضي للعنصر (1) = A_1 ، حيث

$$= \frac{1}{2}\left(A_0 + \frac{3}{2}A_0\right) = \frac{5}{4}A_0$$

$$\therefore [k]^1 = \frac{5EA_0}{4L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow (10)$$

اعتبر العنصر (2) :-

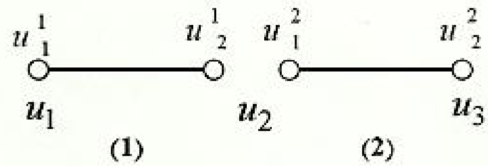


$$[k]^2 = \frac{EA_2}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}A_0 + 2A_0\right) = \frac{7}{4}A_0$$

$$\therefore [k]^2 = \frac{7EA_0}{4L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow (11)$$

$$\{\tilde{u}\} = [C]\{u\}$$,



عليه ، يمكن كتابة مصفوفة الازاحة المحورية للعناصر (1) و(2) كالاتي:-

$$\begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \longrightarrow (12)$$

او $\{\tilde{u}\} = [C]\{u\}$

من المعادلتين (10) و (11) ،

$$[\tilde{k}] = \frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{bmatrix}$$

ولكن مصفوفة الكزازة للقضيب كله يمكن اعطاؤها كالآتي :

$$[k] = [C]^t[\tilde{k}][C]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3×4) (4×4) =

$(3 \times 4) \times (4 \times 3)$

$$=\frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-5&0&0\\-5&5&0&0\\0&0&7&-7\\0&0&-7&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{EA_0}{4L}\underset{3\times 4}{\begin{bmatrix}5&-5&0&0\\-5&5&7&-7\\0&0&-7&7\end{bmatrix}}\underset{4\times 3}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}=\frac{EA_0}{4L}\underset{3\times 3}{\begin{bmatrix}5&-5&0\\-5&12&-7\\0&-7&7\end{bmatrix}}$$

$$=\frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix}5&-5&0\\-5&12&-7\\0&-7&7\end{bmatrix}\longrightarrow (13)$$

من معادلة الاتزان ، $[k]\{u\}=\{X\}$

$$=\frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix}5&-5&0\\-5&12&-7\\0&-7&7\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{Bmatrix}\longrightarrow (14)$$

بتطبيق الشروط الحدودية في المعادلة (14) ،

$$X_1 = X_1 \quad , \quad X_2 = 0 \quad , \quad X_3 = X_3$$

$$\frac{EA_0}{4L}\begin{Bmatrix} 5u_1 - 5u_2 \\ -5u_1 + 12u_2 - 7u_3 \\ -7u_2 + 7u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ 0 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{5EA_0}{4L}(u_1 - u_2) = X_1 \longrightarrow \quad (15)$$

$$\frac{EA_0}{4L}(-5u_1 + 12u_2 - 7u_3) = 0 \longrightarrow \quad (16)$$

$$\frac{7EA_0}{4L}(-u_2 + u_3) = X_3 \longrightarrow \quad (17)$$

من المعادلة (16) ،

$$-5u_1 + 12u_2 - 7u_3 = 0$$
$$-7u_3 = 5u_1 - 12u_2$$

$$\therefore u_3 = \frac{12u_2 - 5u_1}{7} = \frac{12}{7}u_2 - \frac{5}{7}u_1$$

بالتعويض عن قيمة u_3 في المعادلة (17) ،

$$\frac{7EA_0}{4L}\left(-u_2 + \tfrac{12}{7}u_2 - \tfrac{5}{7}u_1\right) = X_3$$

$$\frac{7EA_0}{4L}\left(\tfrac{5}{7}u_2 - \tfrac{5}{7}u_1\right) = X_3$$

$$-\frac{5}{7}\times\frac{7EA_0}{4L}(u_1 - u_2) = X_3$$

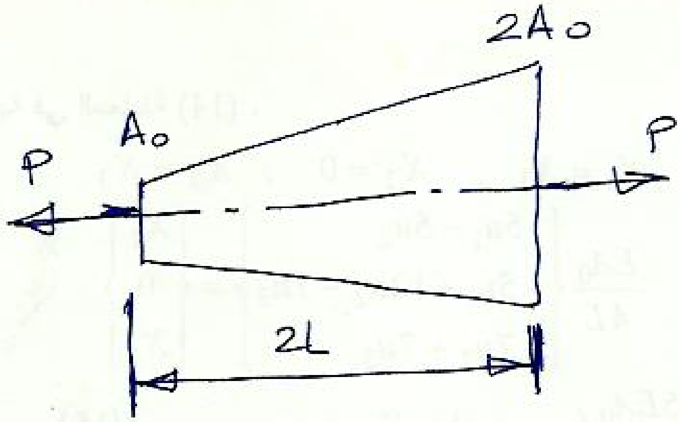
$$\frac{-5EA_0}{4L}(u_1 - u_2) = X_3$$

$\therefore \quad X_1 = -X_3$ قوتان متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه

لايجاد الانفعالات والاجهادات :-

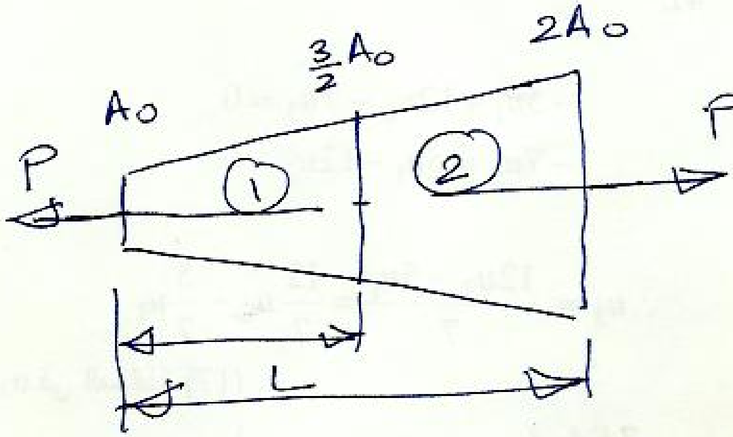
اعتبر العنصر (1) :

الانفعال في العنصر (1) , $\in^1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = -\frac{u_1}{L} + \frac{u_2}{L} = \frac{u_2 - u_1}{L}$



$A = \frac{3A_o}{2}$

$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{2P}{3A_o} = \frac{24 X_3}{36 A_o}$ analytical



σ_1 $A_1 = \frac{1}{2}\left(A_o + \frac{3}{2}A_o\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}A_o\right) = \frac{5}{4}A_o$

$A_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}A_o + 2A_o\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}A_o\right) = \frac{7}{4}A_o$

$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \left[\frac{4P}{5A_o} + \frac{4P}{7A_o}\right]\frac{1}{2}$

$= \left[\frac{28P + 20P}{35}\right] \quad \frac{48}{35} \times \frac{1}{2} P = \frac{24}{35}\frac{X_3}{A_o}$

من المعادلة (15) ،

$$X_1 = \frac{-5EA_0}{4L}(u_2 - u_1)$$

$$\therefore \quad \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{-4X_1}{5EA_0}$$

$$\therefore \quad \in^{(1)} = -\frac{4X_1}{5EA_0} = \frac{4X_3}{5EA_0}$$

الاجهاد في العنصر (1) , $\sigma^1 = E\in^1 = E \times \frac{-4X_1}{5EA_0} = -\frac{4X_1}{5A_0} = \frac{4X_3}{5A_0}$

$$X_1 = -X_3$$ بما أن

اعتبر العنصر (2) :

$$\in^{(2)} = \frac{u_3 - u_2}{L}$$

من المعادلة (17) ،

$$\frac{u_3 - u_2}{L} = \frac{4X_3}{7EA_0}$$

$$\therefore \quad \in^{(2)} = \frac{4X_3}{7EA_0} = \frac{-4X_1}{7EA_0}$$

$$\sigma^{(2)} = E\in^{(2)} = E \times \frac{4X_3}{7EA_0} = \frac{4X_3}{7A_0} = \frac{-4X_1}{7A_0}$$

$$\in_{averrage} = \frac{\in^{(1)} + \in^{(2)}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{4X_3}{5EA_0} + \frac{4X_3}{7EA_0}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{28X_3 + 20X_3}{35EA_0}\right]$$

$$= \frac{24X_3}{35EA_0}$$

$$\sigma_{averrage} = E\in_{averrage} = \frac{24}{35}\frac{X_3}{A_0}$$

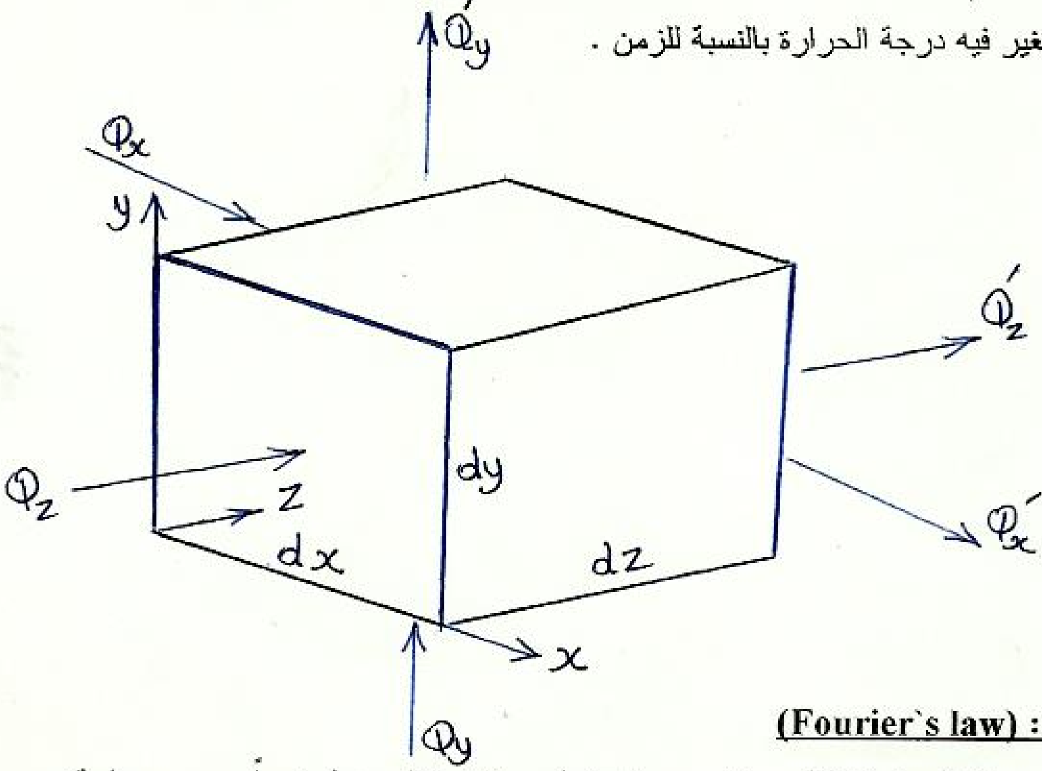
7.0 تطبيق طريقة العناصر المحددة في انتقال الحرارة :

(Application of finite element method in heat transfer)

7.1 المعادلة العامة للتوصيل للاحداثيات المستطيلة :

(General conduction equation for Cartesian co – ordinates)

يمكن اشتقاق المعادلة العامة لجسم مصمت ذو ثلاث ابعاد تتولد فيه حرارة داخلية منتظمة نتيجـــة للتسـخين الذري لجزيئات المادة ، وتتغير فيه درجة الحرارة بالنسبة للزمن .



<u>من قانون فورير للتوصيل : (Fourier`s law)</u>

يقول قانون فورير : معدل سريان الحرارة خلال معدن مصمت متجانس مفرد يتناسب طرديـاً مـع مسـاحة المقطع المتعامد مع اتجاه السريان ومع التغير في درجة الحرارة بالنسبة لطول ممر السـريان $\frac{dt}{dx}$. (هـذا قانون تجريبي مؤسس على المشاهدة) .

$$Q\alpha - A\frac{dt}{dx}$$

$$Q = -kA\frac{dt}{dx}$$, السريان في اتجاه x

$$Q\,dx = -kA\,dt$$

$$\int_0^x Q\,dx = -\int_{t_1}^{t_2} kA\,dt$$

$$Qx = -kA(t_2 - t_1)$$

$$\therefore \quad Q = \frac{-kA}{x}(t_2 - t_1) = \frac{kA}{x}(t_1 - t_2)$$

$$Q_x = -kA\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$= -k(dy\ dz)\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$Q_y = -kA\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$= -k(dx\ dz)\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$Q_z = -kA\frac{\partial t}{\partial z}$$

$$= -k(dx\,dy)\frac{\partial t}{\partial z}$$

التغير في سريان الحرارة في اتجاه x ،

$$Q'_x - Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x}dx = -k\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}dx\,dy\ dz$$

نفس الشئ بالنسبة لاتجاه z , y ،

$$Q'_y - Q_y = \frac{\partial Q}{\partial y}dy = -k\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}dx\ \ dy\ \ dz$$

$$Q'_z - Q_z = \frac{\partial Q}{\partial z}dz = -k\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}dx\ \ dy\ \ dz$$

معدل توليد الحرارة (rate of heat generation):-

$$Q_g = q_g(dx\ \ dy\ \ dz)$$

معدل زيادة طاقة العنصر :

معدل زيادة طاقة العنصر = الكتلة × الحرارة النوعية × معدل تغير الحرارة بالنسبة للزمن

معدل زيادة طاقة العنصر $= \ell(dx\ \ dy\ \ dz)C\frac{\partial t}{\partial \tau}$

موازنة الطاقة للعنصر تُعطى بالمعادلة التالية :-

معدل توليد الحرارة – التغير في سريان الحرارة = معدل زيادة طاقة العنصر

$$q_g(dx\ \ dy\ \ dz) - \left[(Q'_x - Q_x) + (Q'_y - Q_y) + (Q'_z - Q_z)\right] =$$

$$\ell C(dx\ \ dy\ \ dz)\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$q_g(dx\ dy\ dz)-\left[-k\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}dx\ dy\ dz-k\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}dx\ dy\ dz-k\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}dx\ dy\ dz\right]$$

$$=\ell C(dx\ dy\ dz)\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

بقسمة طرفي المعادلة % $dx\ dy\ dz$ نحصل على ،

$$q_g-\left[-k\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}-k\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}-k\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right]=\ell C\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

بقسمة طرفي المعادلة k%

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}+\frac{q_g}{k}=\frac{\ell C}{k}\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

ولكن $\frac{k}{\ell c}=\alpha$ (الانتشارية الحرارية) (thermal diffusivity)

الانتشارية الحرارية هي النسبة بين الموصلية الحرارية k والسعة الحرارية ρc.

اذا كانت قيمة α كبيرة فهذا يعنى اما قيمة k كبيرة او قيمة ρc صغيرة ففي الحالة الاولى يكون هنالك انتقال حراري سريع وفي الحالة الثانية يكون امتصاص الحرارة بواسطة الجسم صغير .

معادلة ثلاثية البعد غير مستقرة : $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}+\frac{q_g}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial t}{\partial \tau}$

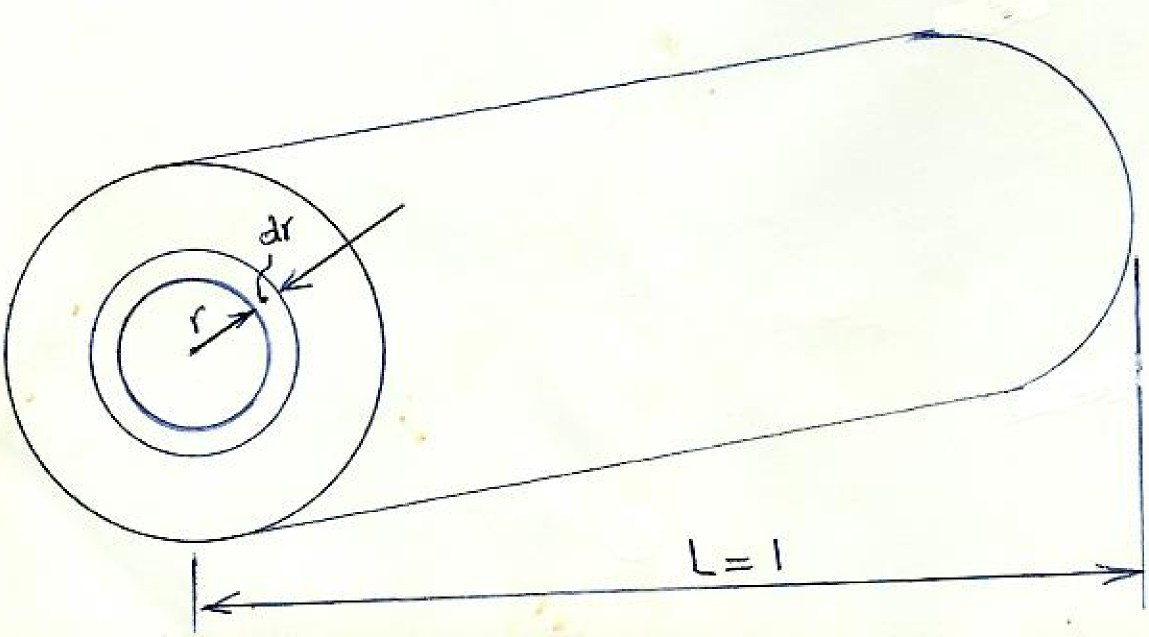
معادلة ثلاثية البعد مستقرة : $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}+\frac{q_g}{k}=0$

7.1 المعادلة العامة للتوصيل للاحداثيات الاسطوانية (القطبية) :

اعتبر سريان الحرارة خلال عنصر صغير سمكه dr عند اى نصف قطر r ، حيث درجة الحرارة هى t.

اجعل الموصلة الحرارية للمادة k .

لوحدة طول في الاتجاه المحوري يمكن كتابة معادلة موازنة الطاقة كالاتي :



معادلة موزانة الطاقة للعنصر

$$q_g 2\pi r.dr - \frac{\partial Q}{\partial r} dr = \rho c.2\pi r \, dr \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$q_g 2\pi r.dr - \frac{\partial}{\partial r}\left(-k 2\pi r \frac{\partial t}{\partial r}\right) dr = \rho c.2\pi r \, dr \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

بقسمة طرفي المعادلة ÷ $2\pi dr$:

$$q_g r + \frac{\partial}{\partial r}\left(kr \frac{\partial t}{\partial r}\right) = \rho c r \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$\therefore q_g r + \left(kr \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + k \frac{\partial t}{\partial r}\right) = \rho c r \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

بقسمة البسط والمقام ÷ kr

$$\therefore \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{q_g}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

معرفة توزيع درجة الحرارة خلال جسم معين ذات اهمية كبيرة في الكثير من المسائل الهندسية . هذه المعلومة ستكون مفيدة في حساب الحرارة المكتسبة والحرارة المفقودة من الجسم . وهي مفيدة في تصميم الغلايات (Boilers)،التوربينات (turbines) ، الالات النفاثة (jet engines)، وقوالب السباكة والصب (casting and moulding dies)

المعادلات الاساسية لانتقال الحرارة ، موازنة الطاقة ومعدل انتقال الحرارة يتم تلخيصها فيما يلي :

$$E^o_{in} + E^o_g = E^o_{out} + E^o_{i.e} \longrightarrow (1)$$

حيث E^o_{in} = سريان الطاقة الى المنظومة (الطاقة الداخلية)

E^o_g = الطاقة المتولدة في المنظومة

E^o_{out} = سريان الطاقة خارج المنظومة (الطاقة الخارجية)

$E^o_{i.e}$ = التغير في الطاقة الداخلية

معادلات معدل انتقال الحرارة : (rate equations)

هذه المعادلات تصف معدل سريان الطاقة :

(i) التوصيل (conduction)
$$q = -k A \frac{\partial t}{\partial x} \longrightarrow (2)$$

(ii) الحمل (convection)
$$q = hA(T - T_\infty) \longrightarrow (3)$$

(iii) الاشعاع (radiation)
$$q = \sigma \in A(T^4 - T^4_\infty) \longrightarrow (4)$$

(iv) الطاقة المتولدة في الجسم المصمت ، E_g^o

$$E_g^o = q^o V \longrightarrow (5)$$

(v) الطاقة المختزنة ، E_s^o

$$E_s^o = \rho c v \frac{\partial T}{\partial t} \longrightarrow (6)$$

معادلة موازنة الطاقة هي :

الطاقة الداخلة في زمن dt + الطاقة المتولدة في زمن dt = الطاقة الخارجة في زمن dt +

التغير في الطاقة الداخلية في زمن dt

ومنها نحصل على :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q^o}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \longrightarrow (7)$$

حيث $\alpha = \dfrac{k}{\rho c}$

وهي معادلة تفاضلية ثلاثية البعد غير مستقرة بتوليد حراري .

7.3 طريقة جاليركن (Galerkin approach):-

طريقة العناصر المحددة باستخدام اسلوب جاليركن يمكن وصفها بالخطوات التالية :

(i) قسّم المنظومة لعدد من العناصر المحددة E تمتلك عدد من العقد مقدارها p.

(ii) افترض شكل مناسب من التفاوت في درجة الحرارة T في كل عنصر محدد وعبّر عن $T^e(\tilde{x}, y, z, t)$ كالاتي :

$$T^e(x, y, z, t) = [N(x, y, z)] T^{-e}$$

في طريقة جاليركن فان المتبقى الوزنى لمنظومة العناصر يتم وضعه كصفر .

$$\iiint_{V^e} Ni\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial T^e}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial T^e}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial T^e}{\partial z}\right) + \dot{q} - \rho c \frac{\partial T^e}{\partial t}\right] dv = 0 \longrightarrow (1)$$

ويمكن كتابتها كالاتي :-

$$[k_1^e] T^e + [k_2^e] T^e + [k_3^e] T^e - p^e = 0 \longrightarrow (2)$$

حيث ،

$$[k_1^e] = \iiint [B]^t [D][B]\, dv \longrightarrow (3)$$

$$[k_2^e] = \iint h [N]^t [N]\, ds \longrightarrow (4)$$

$$\left[k_3^e\right] = \iiint \rho c [N]^T [N]\, dv \longrightarrow (5)$$

$$p^e = p_1^e - p_2^e + p_3^e \longrightarrow (6)$$

$$p_1^e = \iiint \dot{q} [N]^T\, dv \longrightarrow (7)$$

$$p_2^e = \iint q [N]^T\, dv \longrightarrow (8)$$

$$p_3^e = \iint h T_\infty [N]^T\, ds \longrightarrow (9)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & --- & N_p(x) \\ N_1(y) & N_2(y) & --- & N_p(y) \\ N_1(z) & N_2(z) & --- & N_p(z) \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \longrightarrow (10)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial N_p}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial N_p}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial N_p}{\partial z} \end{bmatrix} \longrightarrow (11)$$

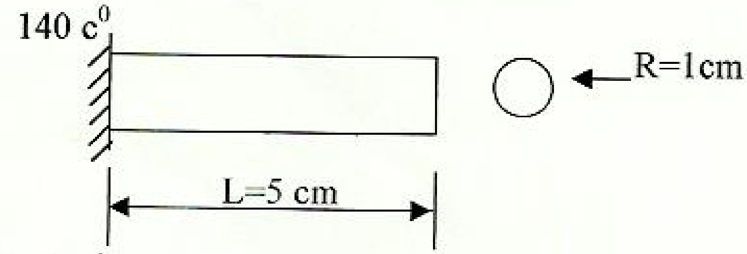
انتقال الحرارة احادي البعد : (One dimensional heat transfer)

المعادلة التفاضلية كالاتي :

$$k \frac{d^2T}{dx^2} + q^{\cdot} = 0 \longrightarrow (12)$$

مثال :-

زعنف مستقيم منتظم : (straight uniform fin)



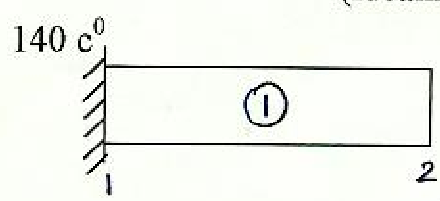
$h=5 w/cm^2 k$

$k=70 w/cm\, k$

خطوات الحل :

(i) قسّم القضيب الى عدة عناصر محددة

(idealize the rode into several finite elements)



في هذه الحالة اعتبر القضيب قسما واحدا

(ii) افترض تفاوت درجة حرارة خطي في اىّ عنصر e

$$T^e(x) = a_1 + a_2 x \qquad (1)$$

العناصر a_1 , a_2 يمكن تمثيلها بدلالة درجة الحرارة العقدية كالاتي :

$$a_1 = q_1 \quad , \quad and \quad a_2 = \frac{q_2 - q_1}{L^e} \qquad (2)$$

$$T^e(x) = [N(x)] q^e$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L^e} & \frac{x}{L^e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \longrightarrow (3)$$

(iii) اشتقاق عناصر المصفوفات : (Derivation of element matrices)

ولان هذه المسالة احادية البعد فان ،

$[D] = [k]$ الموصلية الحرارية

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L^e} & \dfrac{1}{L^e} \end{bmatrix}$$

$$\left[k_1^e\right] = \iiint [B]^T [D][B] \; dv$$

$$= \iiint_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{L^e} \\ \dfrac{1}{L^e} \end{Bmatrix} [k] \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L^e} & \dfrac{1}{L^e} \end{bmatrix} A \, dx$$

$$= \frac{Ak}{L^{e^2}} \int \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{Ak}{L^{e^2}} \int \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{Ak}{L^{e^2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} (x)_0^L = \frac{Ak}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow (4)$$

$$\left[k_2^e\right] = \iint h [N]^T [N] \; ds$$

$$= h \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \dfrac{x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{x}{L} & \dfrac{x}{L} \end{bmatrix} p \, dx$$

حيث p هو المحيط ، $p = 2\pi R$

$$\left[k_2^e\right] = h \int_0^L \begin{Bmatrix} \dfrac{L-x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{L-x}{L} & \dfrac{x}{L} \end{bmatrix} p dx$$

$$= \frac{hp}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} L - x \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L - x & x \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{hp}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} \left(L^2 - 2Lx + x^2\right) & \left(Lx - x^2\right) \\ \left(Lx - x^2\right) & x^2 \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{hp}{L^2}\begin{bmatrix} \left(L^2x - \frac{2Lx^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) & \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \\ \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) & \frac{x^3}{3} \end{bmatrix}_0^L$$

$$= \frac{hp}{L^2}\begin{bmatrix} \left(L^3 - L^3 + \frac{L^3}{3}\right) & \left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3}\right) \\ \left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3}\right) & \frac{L^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{hp}{L^2}\begin{bmatrix} \frac{L^3}{3} & \frac{L^3}{6} \\ \frac{L^3}{6} & \frac{L^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{hp}{L^2}\begin{bmatrix} \frac{2L^3}{6} & \frac{L^3}{6} \\ \frac{L^3}{6} & \frac{2L^3}{6} \end{bmatrix} = \frac{hpL^3}{6L^2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{hpL^e}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow (5)$$

افترض حالة مستقرة، $\left[k_3^e\right] = 0$

$$p^e = p_1^e - p_2^e + p_3^e \longrightarrow (6)$$

$$p_1^e = \iiint \dot{q}[N]^t \, dv \longrightarrow (7)$$

$$p_1^e = \int_{x=0}^{L} \dot{q} \begin{Bmatrix} 1-\dfrac{x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} A \, dx$$

$$p_1^e = \dot{q} A \int_0^L \begin{Bmatrix} 1-\dfrac{x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} dx = \mathring{q} A \int_0^L \begin{bmatrix} \dfrac{L-x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{bmatrix} dx = \frac{\mathring{q} A}{L} \int_0^L \begin{bmatrix} L-x \\ x \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{\mathring{q} A}{L} \begin{Bmatrix} Lx-\dfrac{x^2}{2} \\ \dfrac{x^2}{2} \end{Bmatrix}_0^L = \frac{\mathring{q} A}{L} \begin{Bmatrix} L^2 \quad -\dfrac{L^2}{2} \\ \dfrac{L^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{\mathring{q} A}{L} \begin{Bmatrix} \dfrac{L^2}{2} \\ \dfrac{L^2}{2} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{q^\circ A L^2}{2L} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\dot{q} A L^e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow (8)$$

$$p_2^e = \int_0^L \int q[N]^t \, ds \longrightarrow (9)$$

$$= \int_0^L q \begin{Bmatrix} 1-\dfrac{x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} p \, dx$$

$$= qp \int_0^L \begin{bmatrix} 1-\dfrac{x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{bmatrix} dx = q\, p \int_0^L \begin{Bmatrix} \dfrac{L-x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} dx = \frac{qp}{L^e} \int_0^L \begin{Bmatrix} L-x \\ x \end{Bmatrix} dx$$

$$\frac{qp}{L}\begin{Bmatrix} Lx-\frac{x^2}{2} \\ \frac{x^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{qp}{L}\begin{Bmatrix} L^2-\frac{L^2}{2} \\ \frac{L^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{qp}{L}\times\frac{L^2}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore p_2^e = \frac{qpL^e}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \longrightarrow (10)$$

$$p_3^e = \iint hT_\infty [N]^t \, ds$$

$$= \int_0^L hT_\infty \begin{Bmatrix} 1-\frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} p dx$$

$$= hT_\infty p\int_0^L \begin{Bmatrix} 1-\frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} dx = hT_\infty p\int_0^L \begin{Bmatrix} \frac{L-x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} dx$$

$$= \frac{hT_\infty P}{L}\int_0^L \begin{Bmatrix} L-x \\ x \end{Bmatrix} dx = \frac{hT_\infty P}{L}\begin{Bmatrix} Lx-\frac{x^2}{2} \\ \frac{x^2}{2} \end{Bmatrix}_0^L$$

$$= \frac{hT_\infty p}{L}\begin{Bmatrix} \frac{L^2}{2} \\ \frac{L^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{hT_\infty pL^2}{2L}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{hT_\infty pL}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \longrightarrow (11)$$

$$\left[\widetilde{k}\right]\vec{T} = \vec{P} \longrightarrow (12)$$

$$\left[\widetilde{k}\right] = \sum_{e=1}^{E}\left(\frac{Ak}{L^e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{hpL^e}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) \longrightarrow (13)$$

$$[\tilde{k}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{Ak}{L} + \frac{2hpL}{6}\right) & \left(\frac{-Ak}{L} + \frac{hpL}{6}\right) \\ \left(-\frac{Ak}{L} + \frac{hpL}{6}\right) & \left(\frac{Ak}{L} + \frac{2hpL}{6}\right) \end{bmatrix} \longrightarrow (14)$$

$$\vec{p} = \sum_{e=1}^{E} \frac{1}{2}\left(q^\circ AL^e - qpL^e + hT_\infty pL^e\right)\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} \longrightarrow (15)$$

في هذه الحالة $\quad q^\circ = 0 = q$

وعليه عندما E=1،

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{Ak}{L} + \frac{2hpL}{6}\right) & \left(-\frac{Ak}{L} + \frac{hpL}{6}\right) \\ \left(-\frac{Ak}{L} + \frac{hpL}{6}\right) & \left(\frac{Ak}{L} + \frac{2hpL}{6}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \frac{hpT_\infty L^e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow (16)$$

$$\begin{bmatrix} \left(1 + \frac{hpL^2}{3kA}\right) & \left(-1 + \frac{hpL^2}{6kA}\right) \\ \left(-1 + \frac{hpL^2}{6kA}\right) & \left(1 + \frac{hpL^2}{3kA}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \frac{hpT_\infty L^2}{2kA} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow (17)$$

بالتعويض عن القيم المعطاة بالمسألة ،

$$\frac{hpL^2}{kA} = \frac{5 \times 2\pi \times 1 \times 5^2}{70 \times \pi \times 1^2} = \frac{5 \times 2\pi \times 5^2}{70\pi} = \frac{25}{7}$$

$$\frac{hpT_\infty L^2}{2kA} = \frac{5 \times 2\pi \times 1 \times 40 \times 25}{2 \times 70 \times \pi \times 1^2} = \frac{500}{7}$$

$$\begin{bmatrix} \left(1 + \frac{25}{21}\right) & \left(-1 + \frac{25}{42}\right) \\ \left(-1 + \frac{25}{42}\right) & \left(1 + \frac{25}{21}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \frac{500}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بما ان $T_1 = 140^\circ c$

$$\begin{bmatrix} \frac{46}{21} & -\frac{17}{42} \\ -\frac{17}{42} & \frac{46}{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 140 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{500}{7} \\ \frac{500}{7} \end{bmatrix}$$

$$\frac{46}{21} \times 140 - \frac{17}{42}\ T_2 = \frac{500}{7} \longrightarrow (1)$$

$$-\frac{17}{42} \times 140 + \frac{46}{21}\ T_2 = \frac{500}{7} \longrightarrow (2)$$

من المعادلة (1) ،

$$T_2 = \left(\frac{46 \times 140}{21} - \frac{500}{7}\right) \times \frac{42}{17} = \underline{581.2^\circ c}$$ مرفوضة(rejected)

من المعادلة (2) ،

$$T_2 = \left(\frac{500}{7} + \frac{17}{42} \times 140\right) \times \frac{21}{46} = \underline{58.5^\circ c}$$ (مقبولة)

من المعادلة (17) بالنسبة لعنصرين ،

$$[\tilde{k}] = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{hpL^2}{3kA}\right) & \left(-1 + \frac{hpL^2}{6kA}\right) & 0 & 0 \\ \left(-1 + \frac{hpL^2}{6kA}\right) & \left(1 + \frac{hpL^2}{3kA}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 + \frac{hpL^2}{3kA}\right) & \left(-1 + \frac{hpL^2}{6kA}\right) \\ 0 & 0 & \left(-1 + \frac{hpL^2}{6kA}\right) & \left(1 + \frac{hpL^2}{3kA}\right) \end{bmatrix}$$

$$
\left[\tilde{k}\right]=\begin{bmatrix}\left(1+\dfrac{hpL^2/4}{3kA}\right) & \left(-1+\dfrac{hpL^2/4}{6kA}\right) & 0\\ \left(-1+\dfrac{hpL^2/4}{3kA}\right) & 2\left(1+\dfrac{hpL^2/4}{3kA}\right) & \left(-1+\dfrac{hpL^2/4}{6kA}\right)\\ 0 & \left(-1+\dfrac{hpL^2/4}{6kA}\right) & \left(1+\dfrac{hpL^2/4}{3kA}\right)\end{bmatrix}
$$

$$
\left[\tilde{k}\right]=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & 0\\ a_2 & 2a_1 & a_2\\ 0 & a_2 & a_1\end{bmatrix}
$$

حيث ،

$$
a_1=1+\frac{2hpL^2}{24kA} \quad , \quad a_2=-1+\frac{hpL^2}{24kA}
$$

ايضا من المعادلة (17) ، بالنسبة لعنصرين

$$
\vec{p}=\begin{bmatrix}\dfrac{hpT_\infty L^2/4}{2kA} & 0\\ \dfrac{hpT_\infty L^2/4}{2kA} & \dfrac{hpT_\infty L^2/4}{2kA}\\ 0 & \dfrac{hpT_\infty L^2/4}{2kA}\end{bmatrix}
$$

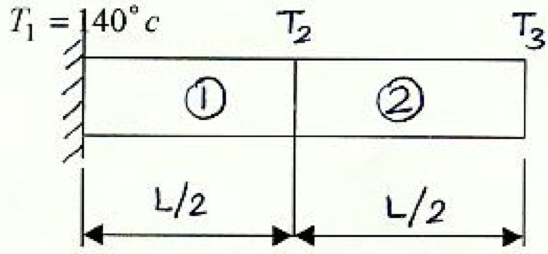
$$
\vec{p}=\begin{Bmatrix}\dfrac{hpT_\infty L^2}{8kA}\\ \dfrac{2hpT_\infty L^2}{8kA}\\ \dfrac{hpT_\infty L^2}{8kA}\end{Bmatrix}
$$

$$\vec{p} = \begin{Bmatrix} b \\ 2b \\ b \end{Bmatrix}$$

حيث ، $b = \dfrac{hpT_\infty L^2}{8kA}$

$\therefore$ المعادلة (17) ستصبح كالاتي :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_2 & 2a_1 & a_2 \\ 0 & a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b \\ 2b \\ b \end{Bmatrix} \longrightarrow (18)$$



عوض عن قيم h , p , L , k , A

$$a_1 = 1 + \frac{2\times 25}{24\times 7} = \frac{109}{84}$$

$$a_2 = -1 + \frac{1\times 25}{24\times 7} = -\frac{143}{168}$$

$$b = \frac{hpT_\infty L^2}{8kA} = \frac{500}{28}$$

عوض في المعادلة (18) ،

$$\begin{bmatrix} \dfrac{109}{84} & -\dfrac{143}{168} & 0 \\ -\dfrac{143}{168} & \dfrac{109}{42} & -\dfrac{143}{168} \\ 0 & -\dfrac{143}{168} & \dfrac{109}{84} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 140 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{500}{28} \\ \dfrac{1000}{28} \\ \dfrac{500}{28} \end{Bmatrix} \longrightarrow (19)$$

حل المعادلة عندما $T_1 = 140^\circ c$

$$\frac{109}{84} \times 140 - \frac{143}{168} T_2 = \frac{500}{28} \quad \longrightarrow \quad (1)$$

$$T2 = \left[\frac{109}{84} \times 140 - \frac{500}{28}\right] \frac{168}{143} = \underline{192.45^\circ c}$$ (مرفوضة)

بما انَّ $192.45 > 140$

$$-\frac{143}{168} \times 140 + \frac{109}{42} \times T_2 - \frac{143}{168} \times T_3 = \frac{1000}{28}$$

$$\frac{109}{42} T_2 - \frac{143}{168} T_3 = \frac{1000}{28} + \frac{143}{168} \times 140 \quad \longrightarrow \quad (2)$$

$$-\frac{143}{168} T_2 + \frac{109}{84} T_3 = \frac{500}{28} \quad \longrightarrow \quad (3)$$

باختصار المعادلتين (2) و(3) لتصبحا

$$2.6\, T_2 - 0.851 T_3 = 154.9 \quad \longrightarrow \quad (2)$$

$$-0.85 T_2 + 2.6 T_3 = 17.86 \quad \longrightarrow \quad (3)$$

بضرب المعادلة (3) × $\frac{0.851}{2.6}$ لتصبح ،

$$-0.28 T_2 + 0.851 T_3 = 5.85 \quad \longrightarrow \quad (4)$$

بجمع المعادلتين (2) و (4) نحصل على ،

$$(2.6 - 0.28) T_2 + 0 = 154.9 + 5.85$$

$$2.32 T_2 = 160.75$$

$$\therefore T_2 = \frac{160.75}{2.32} = \underline{\underline{69.3^\circ c}}$$

نعوض عن قيمة T_2 في المعادلة (2) ،

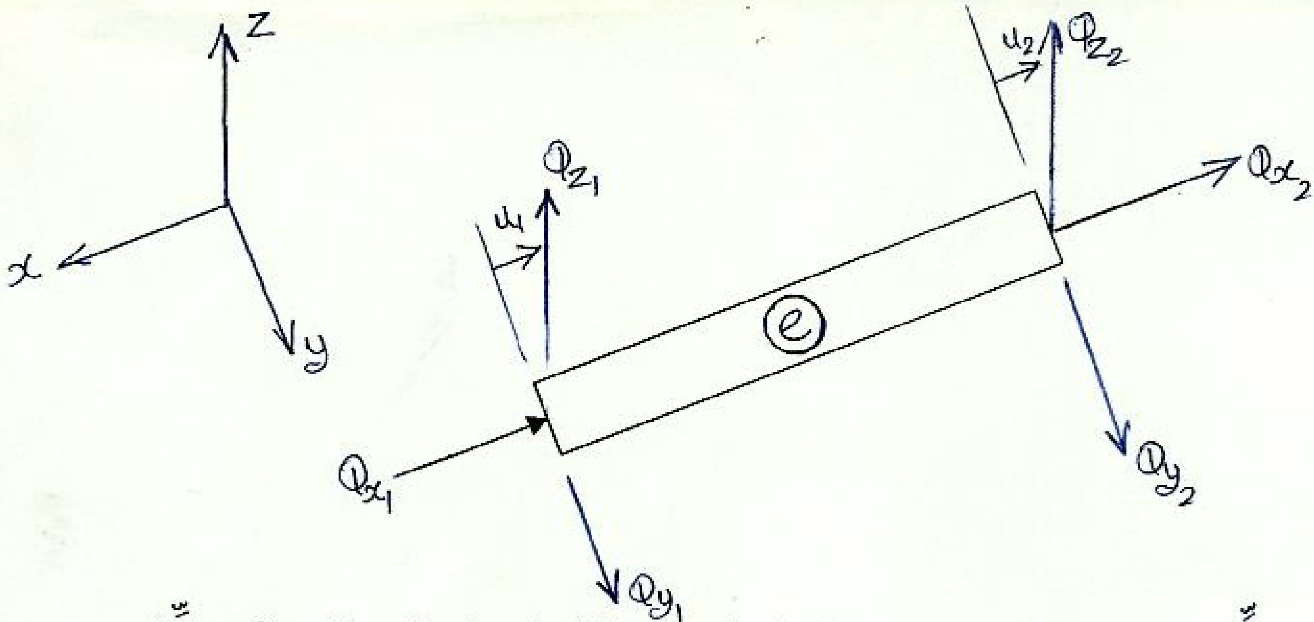
$$2.6 \times 69.3 - 0.851 T_3 = 154.9$$

$$\therefore T_3 = \frac{2.6 \times 69.3 - 154.9}{0.851} = \underline{\underline{29.7^\circ c}}$$

8.0 تحليل الجملونات : (Analysis of trusses)

8.1 العنصر الفراغي للجلمون : (Space truss element)

اعتبر عنصر الوصلة المسمارية الموضح في الشكل ادناه :



u_1 , u_2 تمثّل درجات الحرية العقدية في الاحداثيــات الموضعيــة للمنظومــة، Q_x , Q_y , Q_z تمثّــل الازاحة الكونية للمنظومة .

عليه ،

$$u_1 = L_{12}\,Q_{x1} + m_{12}Q_{y1} + n_{12}Q_{z1}$$
$$u_2 = L_{12}\,Q_{x2} + m_{12}Q_{y2} + n_{12}Q_{z2}$$

حيث ،

$$L_{12} = \cos\theta_x$$
$$m_{12} = \cos\theta_y$$
$$n_{12} = \cos\theta_z$$

$$\{u\}^e = [C]\{\theta\}$$

حيث ؛

$$[C] = \begin{bmatrix} L_{12} & m_{12} & n_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{12} & m_{12} & n_{12} \end{bmatrix}$$

وتسمى بمصفوفة التحويل (transformation matrix)

$$L_{12} = \frac{x_2 - x_1}{L}$$
$$m_{12} = \frac{y_2 - y_1}{L}$$
$$n_{12} = \frac{z_2 - z_1}{L}$$

حيث ،

$$L=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \quad \text{، الطول}$$

متجه الحمل يمكن الحصول عليه من :

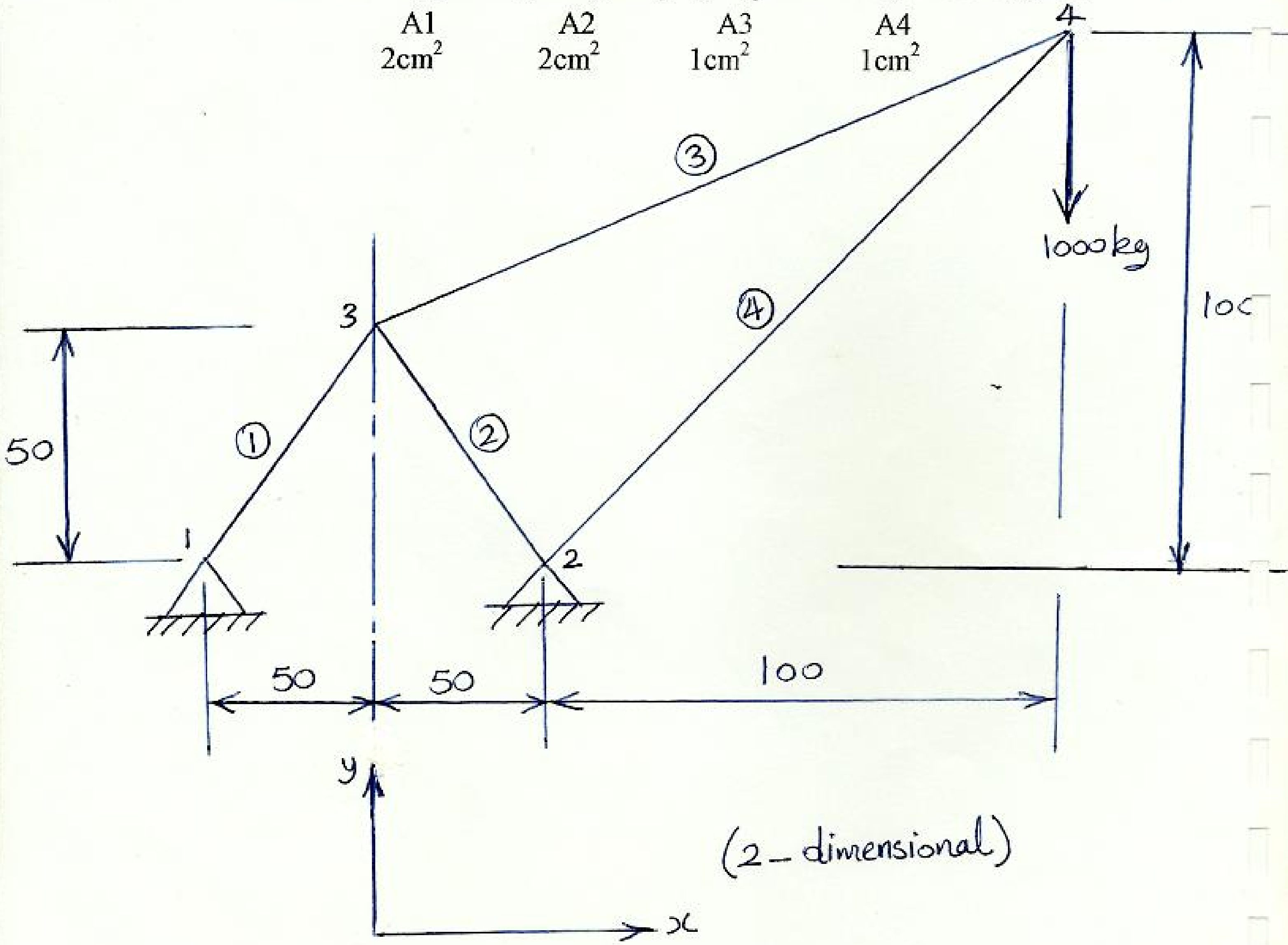
$$\{p\}=[C]^t\{p\}$$

مصفوفة الكزازة هى :

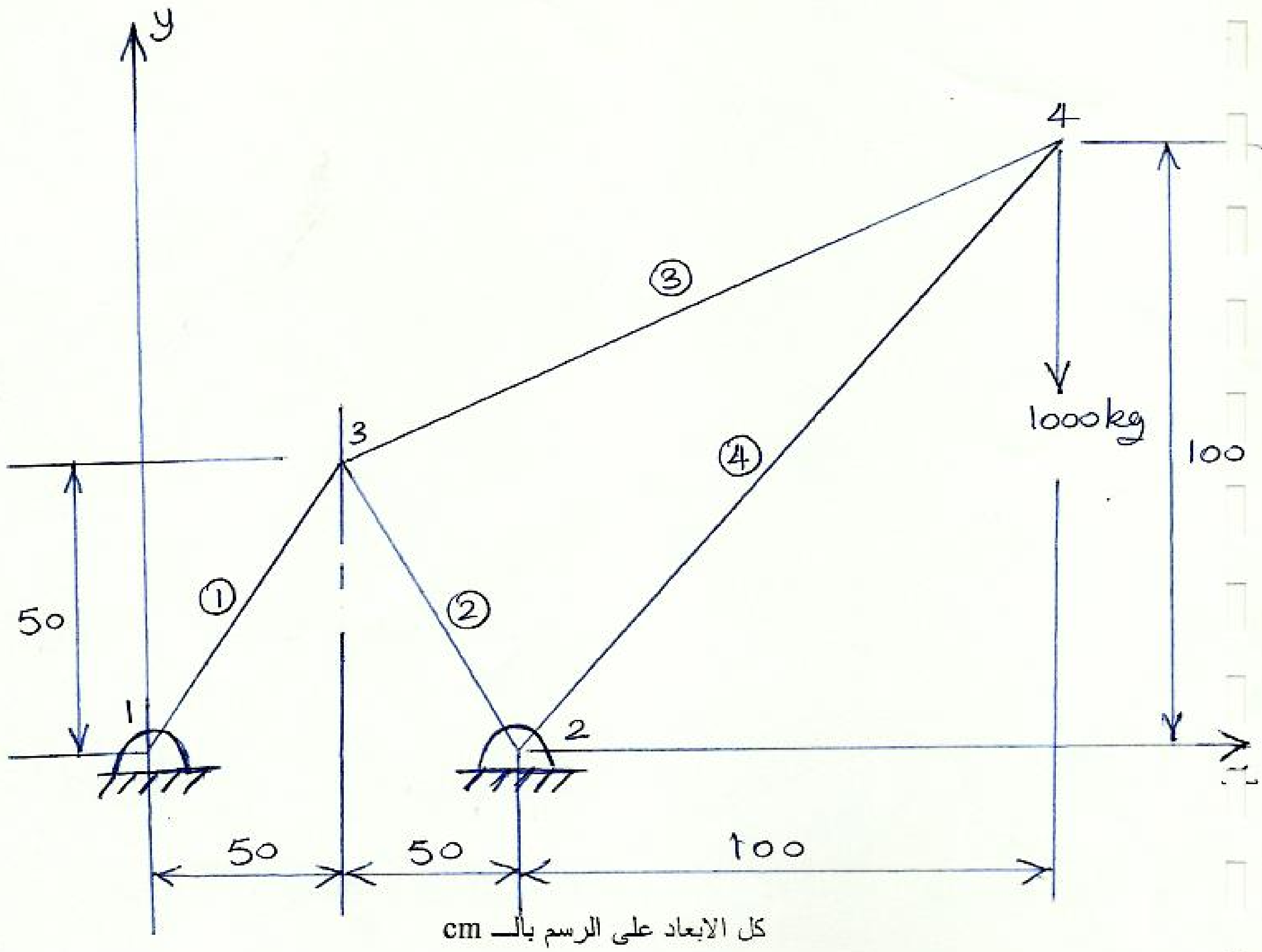
$$[k]=[C]^t[k][C]$$

8.2 مثال :- أوجد الازاحة العقدية والاجهادات الداخلية التى تنشأ في الجملون الموضّح ادناه عندما يتـــم تطبيق قوة راسية الى اسفل عند العقدة 4 مقدارهـــا 1000kg . معـــاير يونـــق للمرونـــة يعـــادل $2\times10^6\,kg/cm^2$ ومساحة المقطع العرضي للاجزاء الاربعة كالاتي

A1	A2	A3	A4
$2cm^2$	$2cm^2$	$1cm^2$	$1cm^2$



كل الابعاد على الرسم بالـــ cm



كل الابعاد على الرسم بالـــ cm

خط نقطة المرجعية عند العقدة (1)

رقم العنصر او الجزء	العقدة الكونية المقابلة لـ		x_1	$y1$	x_2	y_2	الطول L	جيوب التمام	
	العقدة الموضعية 1	العقدة الموضعية 2						L_{12}	m_{12}
1	1	3	0	0	50	50	$50\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
2	3	2	50	50	100	0	$50\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
3	3	4	50	50	200	100	$50\sqrt{10}$	$\frac{3}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$
4	2	4	100	0	200	100	$100\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

العنصر رقم (1) ، الطول L،

$$L=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$=\sqrt{50^2+50^2+0^2}\ =\sqrt{5000}=\sqrt{2500\times 2}\ =\underline{50\sqrt{2}}$$

العنصر رقم (2) ،

$$L=\sqrt{50^2+(-50)^2}\ =\underline{50\sqrt{2}}$$

العنصر رقم (3)،

$$L=\sqrt{150^2+50^2}\ =\sqrt{25{,}000}\ =\sqrt{2500\times 10}\ =\underline{50\sqrt{2}}$$

العنصر رقم (4) ،

$$L=\sqrt{100^2+100^2}\ =\sqrt{20{,}000}\ \sqrt{10{,}000\times 2}\ =\underline{100\sqrt{2}}$$

<u>جيوب تمام الاتجاه : (Direction cosines)</u>

العنصر رقم (1) ،

$$L_{12}=\ \frac{x_2-x_1}{L}=\frac{50}{50\sqrt{2}}\ =\ \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$m_{12}=\frac{y_2-y_1}{L}=\frac{50}{50\sqrt{2}}\ =\ \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

العنصر رقم (2) ،

$$L_{12}=\frac{50}{50\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$m_{12}=\frac{-50}{50\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

العنصر رقم (3) ،

$$L_{12}=\frac{150}{50\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$
$$m_{12}=\frac{50}{50\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

العنصر رقم (4) ،

$$L_{12} = \frac{100}{100\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$m_{12} = \frac{100}{100\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

<u>تحديد مصفوفة الكزازة للعناصر الاربعة :</u>

العنصر رقم (1) :

$$[k]^1 = [C]^T [k]^e [C]$$

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C]^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; [k]^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{EA_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{2 \times 10^6 \times 2}{50\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2\sqrt{2} \times 10^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2\sqrt{2} \times 10^4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} kg/cm \longrightarrow (1)$$

العنصر رقم (2) :

$$[k]^2 = \frac{EA_2}{L_2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2\times10^6\times2}{50\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[C]^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ [k]^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{2\times10^6\times2}{50\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= 2\sqrt{2}\times10^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= 2\sqrt{2}\times10^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} kg/cm \text{ ——————— } (2)$$

العنصر رقم (3) :

$$[k]^e = \frac{EA_3}{L_3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2\times10^6\times1}{50\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2\sqrt{10}}{5}\times10^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad [C]^T = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ [k]^3 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\frac{2\sqrt{10}}{5}\times 10^4\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$= 4\sqrt{10}\ \times 10^2\begin{bmatrix}3 & -3\\ 1 & -1\\ -3 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$= 4\sqrt{10}\ \times 10^2\begin{bmatrix}9 & 3 & -9 & -3\\ 3 & 1 & -3 & -1\\ -9 & -3 & 9 & 3\\ -3 & -1 & 3 & 1\end{bmatrix}\ kg/cm \longrightarrow (3)$$

العنصر رقم (4) :

$$[k]^4 = \frac{EA_4}{L_4}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \frac{2\times 10^6\times 1}{100\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{2}\times 10^4\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad [C]^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ [k]^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\ \sqrt{2}\times 10^4\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore [k]^4 = 50\sqrt{2}\times 10^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; kg/cm \longrightarrow (4)$$

للانسجام بين العناصر المتجاورة : (For compatibility)

$$\{u\}^e = [C]\,\{Q\}$$

$$\begin{Bmatrix} u^1x_1 \\ u^1y_1 \\ u^1x_2 \\ u^1y_2 \\ u^2x_1 \\ u^2y_1 \\ u^2x_2 \\ u^2y_2 \\ u^3x_1 \\ u^3y_1 \\ u^3x_2 \\ u^3y_2 \\ u^4x_1 \\ u^4y_1 \\ u^4x_2 \\ u^4y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Qx_1 \\ Qy_1 \\ Qx_2 \\ Qy_2 \\ Qx_3 \\ Qy_3 \\ Qx_4 \\ Qy_4 \end{Bmatrix}$$

مصفوفة الكزازة الكلية يمكن اعطاؤها كالاتي :

$$[k]=[C]^T\left[\tilde{k}\right][C]$$

$$\left[\tilde{k}\right]=\begin{bmatrix} [k]^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [k]^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [k]^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [k]^4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\tilde{k}\right]=\begin{bmatrix}
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{-9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{1}{10\sqrt{5}} & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-1}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-9}{10\sqrt{5}} & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-1}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{1}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}
\end{bmatrix}$$

$$
\therefore [k] = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}_{(8\times 16)} \times 2\sqrt{2}\times 10^{4}
$$

$$
\times \begin{bmatrix}
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{-9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{1}{10\sqrt{5}} & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-1}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-9}{10\sqrt{5}} & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-1}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{1}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}
\end{bmatrix}
$$

$$
\times \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} =
$$

$$
2\sqrt{2}\times 10^4 \begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & \frac{20\sqrt{5}+9}{10\sqrt{5}} & \frac{7.5\sqrt{5}+3}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & \frac{7.5\sqrt{5}+3}{10\sqrt{5}} & \frac{22.5\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}} & \frac{-2.5\sqrt{5}-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-2.5\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2.5\sqrt{5}-9}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2.5\sqrt{5}-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-2.5\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}} & \frac{-2.5\sqrt{5}+3}{10\sqrt{5}} & \frac{2.5\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}}
\end{bmatrix}
$$

للاتزان : (For equilibrium)

$$[k]\,\{u\} = \{P\}$$

$$
2\sqrt{2}\times 10^{4}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & \frac{9+20\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{3+7.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & \frac{3+7.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{1+22.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{-3-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{-1-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-9-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{-1-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{3+2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{1+2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_2 \\ u_4 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} Px_1 \\ Py_1 \\ Px_2 \\ Py_2 \\ Px_3 \\ Py_3 \\ Px_4 \\ Py_4 \end{Bmatrix}
$$

الشروط الحدودية (Boundary conditions):

$$u_1 = 0 \quad , \quad u_{2=0}$$

$$Py_4 = 1000\,kg \quad , \quad Px_4 = 0$$

$$2\sqrt{2}\times 10^4 (u_3 - u_3 - u_4) = p_{x1}$$

$$\therefore p_{x1} = -2\sqrt{2}\times 10^4 u_4 \longrightarrow (1)$$

$$2\sqrt{2}\times 10^4 (u_3 - u_3 - u_4) = p_{y1}$$

$$\therefore p_{y1} = -2\sqrt{2}\times 10^4 u_4 \longrightarrow (2)$$

$$2\sqrt{2}\times 10^4 (-u_3 + u_3) = p_{x2}$$

$$\therefore p_{x2} = 0 \longrightarrow (3)$$

$$2\sqrt{2}\times 10^4 (-u_3 + u_3) = p_{y2}$$

$$\therefore p_{y2} = 0 \quad \text{———} \quad (4)$$

$$2\sqrt{2}\times 10^4 \left(-u_3 - u_3 + \left(\frac{9+20\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} \right) u_3 + \left(\frac{3+7.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} \right) u_4 \right) = Px_3 \longrightarrow (5)$$

$$2\sqrt{2}\times10^4\left(-u_3+u_3+\left(\frac{3+7.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_3+\left(\frac{1+22.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_4+\left(\frac{-1-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_4\right)=Py_3 \longrightarrow (6)$$

$$2\sqrt{2}\times10^4\left(\frac{-9-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_3=Px_4 \longrightarrow (7)$$

$$2\sqrt{2}\times10^4\left(\frac{-3-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_3+\left(\frac{-1-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_4+\left(\frac{1+2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_4=Py_4 \longrightarrow (8)$$

من المعادلة (8) ،

$$2\sqrt{2}\times10^4\left(\frac{-3-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_3=1000$$

$$\therefore u_3=\frac{1000}{2\sqrt{2}\times10^4}\times\frac{10\sqrt{5}}{-3-2.5\sqrt{5}}$$

$$=\underline{-0.09203}\,cm$$

9.0 انحراف العارضات باستخدام طريقة العناصر المحددة :

(Deflection of beams using finite element method)

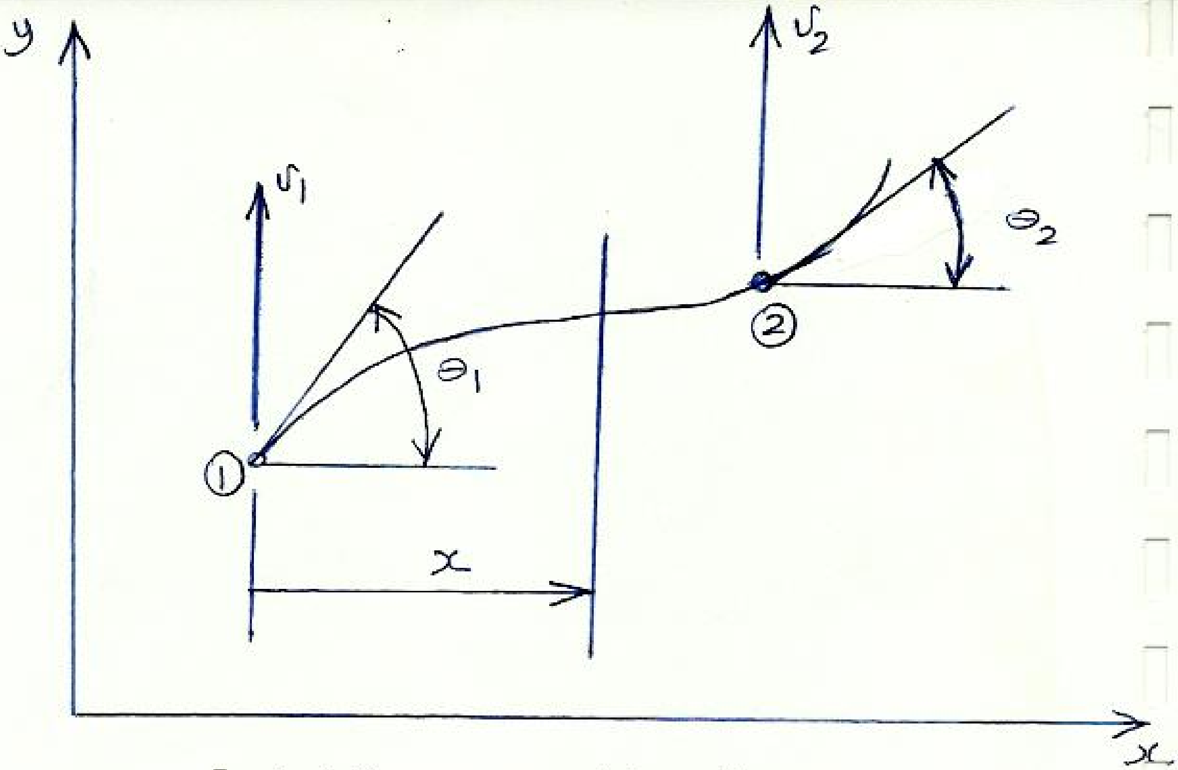
طبقا للنظرية الهندسية لانحراف العارضات فان تغير الشكل يتم تحديده بمنحنى الانحراف (deflection curve) $v(x)$ الماخوذ عند خط منتصف القضيب ، وهكذا فان مسالة انحراف العارضات هى احادية البعد ومحددة العنصر تحتوى على عنصر خطي .

نعرف من ميكانيكا المواد ان طاقة الانفعال تحتوي على $v''(x)$ ، وعليه وللاستمرارية ،

$$v(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=[f(x)]\{a\} \longrightarrow (1)$$ (الانحراف)

وهكذا فان العنصر يجب ان يمتلك اربعة درجات حرية .

كما في السابق فإننا نعتبر الازاحات العقدية والميلانات ككميات متجهة



$$[u^e]^t = \left[v_1 \left(\frac{dv(x)}{dx} \right)_1 \quad v_2 \left(\frac{dv(x)}{dx} \right)_2 \right] \longrightarrow (2)$$ ، الإزاحة العقدية

عند x =0 ، وx =L في المعادلة (1)

$$v(x) = [f(x)]\{a\} \longrightarrow (1)$$

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \longrightarrow (3)$$

$$[u]^e = [A]\{a\} \longrightarrow (4)$$

$$\{a\} = [A]^{-1}\{u\}^e$$

يمكن اعادة كتابة المعادلة (1) كالآتي :-

$$v^e(x) = [f(x)][A]^{-1}\{u\}^e$$

$$= [N(x)]\{u\}^e \longrightarrow (5)$$

حقيقة ،

$$[N(x)] = [f(x)][A]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} [A]^{-1}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & L & L^2 & L^3\\ 0 & 1 & 2L & 3L^2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{adjA}{|A|}=\frac{C^T}{|A|}$$

$$|A|=1\times\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ L & L^2 & L^3\\ 1 & 2L & 3L^2\end{vmatrix}+0=1\times\begin{vmatrix}L^2 & L^3\\ 2L & 3L^2\end{vmatrix}=3L^4-2L^4=L^4$$

مصفوفة العوامل المرافقة C،

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ L & L^2 & L^3\\ 1 & 2L & 3L^2\end{vmatrix}=L^4$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & L^2 & L^3\\ 0 & 2L & 3L^2\end{vmatrix}=0$$

$$A_{13}=+\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & L & L^3\\ 0 & 1 & 3L^2\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1 & L^3\\ 0 & 3L^2\end{vmatrix}=-3L^2$$

$$A_{14}=+\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & L & L^2\\ 0 & 1 & 2L\end{vmatrix}=+\begin{vmatrix}1 & L^2\\ 0 & 2L\end{vmatrix}=2L$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ L & L^2 & L^3 \\ 1 & 2L & 3L^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L^2 & L^3 \\ 0 & 2L & 3L^2 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} L^2 & L^3 \\ 2L & 3L^2 \end{vmatrix} = 3L^4 - 2L^4 = L^4$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^3 \\ 0 & 1 & 3L^2 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} L & L^3 \\ 1 & 3L^2 \end{vmatrix} = 3L^3 - L^3 = 2L^3 = -2L^3$$

$$A_{24} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 \\ 0 & 1 & 2L \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} L & L^2 \\ 1 & 2L \end{vmatrix} = 2L - L^2 = L^2$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2L & 3L^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2L & 3L^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2L & 3L^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3L^2 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3L^2 \end{vmatrix} = 3L^2$$

$$A_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2L \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2L \end{vmatrix} = 2L$$

$$A_{41} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ L & L^2 & L^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{42} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & L^2 & L^3 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ L^2 & L^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & L & L^3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ L & L^3 \end{vmatrix} = -L^3$$

$$A_{44} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & L & L^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & L \\ L & L^2 \end{vmatrix} = L^2$$

$$C = \begin{bmatrix} L^4 & 0 & -3L^2 & 2L \\ 0 & L^4 & -2L^3 & L^2 \\ 0 & 0 & 3L^2 & 2L \\ 0 & 0 & -L^3 & L^2 \end{bmatrix}$$

$$adj\, A = C^T = \begin{bmatrix} L^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^4 & 0 & 0 \\ -3L^2 & -2L^3 & 3L^2 & -L^3 \\ 2L & L^2 & 2L & L^2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{adjA}{|A|}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L}\\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2}\end{bmatrix}$$

$$[N(x)]=[f(x)][A]^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & x^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L}\\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2}\end{bmatrix}$$

$1\times\boxed{4 \qquad 4}\times 4$

$$=\left[\left(1-\frac{3x^2}{L^2}+\frac{2x^3}{L^3}\right)\quad\left(x-\frac{2x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2}\right)\quad\left(\frac{3x^2}{L^2}+\frac{2x^3}{L^3}\right)\quad\left(-\frac{x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2}\right)\right] \longrightarrow (6)$$

لنخطو خطوة للامام فاننا نحتاج لايجاد $v''(x)$ ،

$$v''(x)=[N''(x)]\{u\}^e \longrightarrow (7)$$

طاقة الانفعال للانحراف تعطي كالآتي :

$$U^e=\frac{1}{2}\int_0^L EI(v''(x))^2\,dx \longrightarrow (8)$$

$U=\int M^2\,dx/2EI$

$M=EI\dfrac{d^2v}{dx^2}$

بوضع $EI=[D]$

$$U^e = \frac{1}{2}\{u^e\}^t \left(\int_0^L [B]^t [D][B] \, dx \right) \{u\}^e \longrightarrow (9)$$

لقضيب منتظم الشكل : (For a uniform bar)

$$[k]^e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \longrightarrow (10)$$

$$[K]^e = \int_0^L [B]^t [D][B] \, dx$$

يتم الحصول على المعادلة (10) عاليه كالاتي :

للعنصر الاول ،

$$[N(x)] = \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)$$

$$N'(x) = 0 - \frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3}$$

$$N''(x) = \frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}$$

$$[k]^e = EI \int_0^L \left(\frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right)^2 dx$$

$$= EI \int_0^L \left(\frac{36}{L^4} - \frac{144x}{L^5} + \frac{144x^2}{L^6}\right) dx$$

$$= EI \left[\frac{36x}{L^4} - \frac{144x^2}{2L^5} + \frac{144x^3}{3L^6}\right]_0^1$$

$$= EI \left(\frac{36L}{L^4} - \frac{144L^2}{2L^5} + \frac{144L^3}{3L^6}\right)$$

$$= \frac{EI}{L^3}(36 - 72 + 48) = \frac{EI}{L^3}(12)$$

بمتابعة بقية العناصر يمكن الحصول على المعادلة (10) ،

طاقة الوضع للاحمال الخارجية ،

$$\Omega = -\sum \int_0^L \{u\}^e [N(x)]^t P(x)\ dx - \{u\}^e [P_c] \longrightarrow (5)$$

حيث ،

$$\{P_c\} = P_1\ ,\ M_1\ ,\ P_2\ ,\ M_2$$

او $$\Omega = -\sum \{u^e\}^t \{P_d\}^e - \{u\}^e \{P_c\} \longrightarrow (12)$$

للانسجام : (For compatibility)

$$v_1^1 = v_1$$
$$\theta_1^1 = \theta_1$$
$$v_2^1 = v_2$$
$$\theta_2^1 = \theta_2$$

$$\{\tilde{u}\} = [C]\{u\}$$

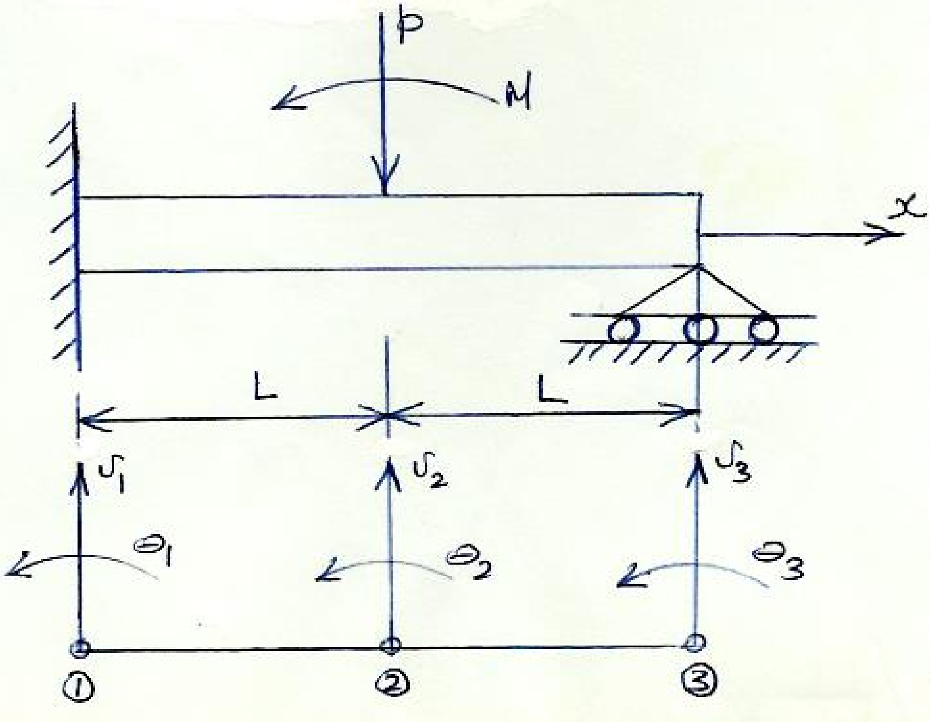
طاقة الوضع الكلية ،

$$V = \frac{1}{2}\{u\}^t [k]\{u\} - \{u\}^t (\{P_d\} + \{P_c\})$$

للاتزان $\delta V = 0$ ، عليه سنتحصل على ،

$$[k]\{u\} = \{P\} = \{\{P_d\} + \{P_c\}\}$$

مثال :-



مثال :-

للانسجام : (For compatibility)

$$\begin{Bmatrix} v_1^1 \\ \theta_1^1 \\ v_2^1 \\ \theta_2^1 \\ v_1^2 \\ \theta_1^2 \\ v_2^2 \\ \theta_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta 1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

باجراء عملية التجميع : (carrying out the assembly process)

$$[k] = [C]^t \left[\tilde{k}\right][C]$$

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & \left(k_{33}^1 + k_{11}^2\right) & \left(k_{34}^1 + k_{12}^2\right) & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & \left(k_{43}^1 + k_{21}^2\right) & \left(k_{44}^1 + k_{22}^2\right) & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \\ P_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

الشروط الحدودية (B. conditions) :

$$v_1 = \theta_1 = v_3 = 0$$

احذف الصفوف والاعمدة المناظرة لـ $v_1 = \theta_1 = v_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} \left(k_{33}^1 + k_{11}^2\right) & \left(k_{34}^1 + k_{12}^2\right) & k_{14}^2 \\ \left(k_{43}^1 + k_{11}^2\right) & \left(k_{44}^1 + k_{22}^2\right) & k_{24}^2 \\ k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ M \\ 0 \end{Bmatrix}$$

اخيرا سنحصل على :

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 24 & 0 & 6L \\ 0 & 8L^2 & 2L^2 \\ 6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ M \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[k]^{-1} = \begin{bmatrix} 7L^2 & 3L & -12L \\ 3L & 15 & -12 \\ -12L & -12 & 48 \end{bmatrix}$$

<u>**9.1 مثال**</u> : تعطى مصفوفة الكزازة لعنصر قضيب تحت تأثير الانحناء كالاتي :

$$[k]^e = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

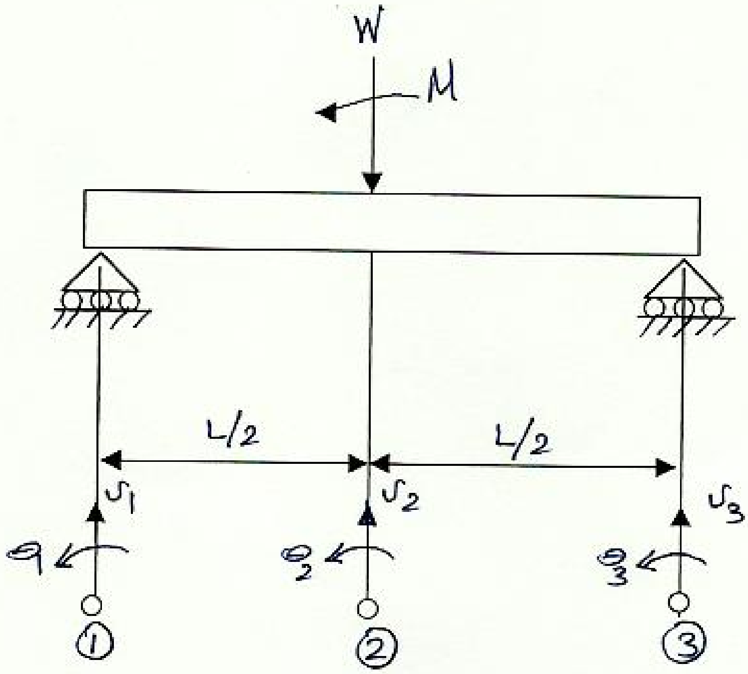
حيث ،

E = معايير يونق للمرونة

I = العزم الثاني للمساحة

L = طول العنصر

أوجد الازاحة القصوى لعارضة مسندة اسنادا بسيطا تحمل حملا متمركزا W عند منتصفها اذا كان طولـــها يساوي L . قارن اجابتك بالحل التحليلي للمسالة .



(For compatibility) : للانسجام

$$
\begin{Bmatrix} v_1^1 \\ \theta_1^1 \\ v_2^1 \\ \theta_2^1 \\ v_1^2 \\ \theta_1^2 \\ v_2^2 \\ \theta_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta 1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}
$$

$$[k]=[C]^t\left[\tilde{k}\right][C]$$

$$[K]=\begin{bmatrix} k^1_{11} & k^1_{12} & k^1_{13} & k^1_{14} & 0 & 0 \\ k^1_{21} & k^1_{22} & k^1_{23} & k^1_{24} & 0 & 0 \\ k^1_{31} & k^1_{32} & \left(k^1_{33}+k^2_{11}\right) & \left(k^1_{34}+k^2_{12}\right) & k^2_{13} & k^2_{14} \\ 0 & 0 & k^2_{31} & k^2_{32} & k^2_{33} & k^2_{34} \\ 0 & 0 & k^2_{41} & k^2_{42} & k^2_{43} & k^2_{44} \end{bmatrix}$$

معادلة الاتزان ،

$$[k]\{u\}=\{P\}$$

$$\begin{bmatrix} k^1_{11} & k^1_{12} & k^1_{13} & k^1_{14} & 0 & 0 \\ k^1_{21} & k^1_{22} & k^1_{23} & k^1_{24} & 0 & 0 \\ k^1_{31} & k^1_{32} & \left(k^1_{33}+k^2_{11}\right) & \left(k^1_{34}+k^2_{12}\right) & k^2_{13} & k^2_{14} \\ k^1_{41} & k^1_{42} & \left(k^1_{43}+k^2_{21}\right) & \left(k^1_{44}+k^2_{22}\right) & k^2_{23} & k^2_{24} \\ 0 & 0 & k^2_{31} & k^2_{32} & k^2_{33} & k^2_{34} \\ 0 & 0 & k^2_{41} & k^2_{42} & k^2_{43} & k^2_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \\ P_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

الشروط الحدودية **(Boundary conditions)**

$$v_1 = v_3 = \theta_2 = 0$$

$$P_1 = \frac{W}{2} \;,\quad P_2 = 0 \;,\quad P_3 = -\frac{W}{2}$$

$$M_1 = 0 \;,\; M_2 = M \;,\quad M_3 = 0$$

احذف الاعمدة والصفوف المناظرة للشروط الحدودية عاليه ،

$$\begin{bmatrix} k^1_{22} & k^1_{23} & 0 \\ k^1_{32} & \left(k^1_{33}+k^2_{11}\right) & k^2_{14} \\ 0 & k^2_{41} & k^2_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{W}{2} \\ M \\ -\dfrac{W}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 4L^2 & -6L & 0 \\ -6L & 24 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{W}{2} \\ M \\ -\frac{W}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{EI}{L^3}\left[4L^2\theta_1 - 6Lv_2\right] = \frac{W}{2} \longrightarrow (1)$$

$$\frac{EI}{L^3}\left[-6L\theta_1 + 24v_2 + 6L\theta_3\right] = M \longrightarrow (2)$$

$$\frac{EI}{L^3}\left[6Lv^2 + 4L^2\theta_3\right] = -\frac{W}{2} \longrightarrow (3)$$

من المعادلة (1) ،

$$\theta_1 = \left[\frac{WL^3}{2EI} + 6Lv^2\right] \times \frac{1}{4L^2} \longrightarrow (4)$$

من المعادلة (3)،

$$\theta_3 = \left[\frac{-WL^3}{2EI} - 6Lv^2\right] \times \frac{1}{4L^2} \longrightarrow (5)$$

من المعادلتين (4) و (5) ،

$$\theta_1 = -\theta_3 = \theta$$

من المعادلة (2) ،

$$\frac{EI}{L^3}\left[6L\theta_3 + 24v_2 + 6L\theta_3\right] = M$$

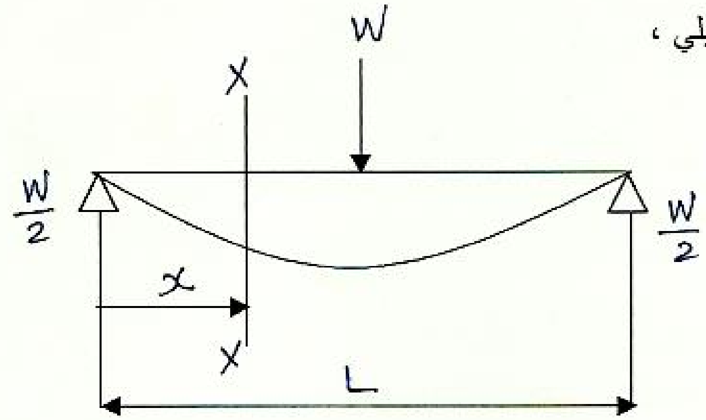
$$\frac{EI}{L^3}\left[\overset{\text{zero}}{12L\theta_3} + 24v_2\right] = M = \frac{WL}{2}$$

$$v_2 = \frac{WL^4}{48EI}$$

$$24v_2\frac{EI}{L^3} = \frac{WL}{2}$$

$$v_2 = \frac{WL^4}{48EI}$$

بالحل التحليلي ،



$$-M = \frac{W}{2}x$$

$$M = -EI\ \frac{d^2 y}{dx^2} = -\tfrac{1}{2}\ Wx$$

بالتكامل ،

$$EI\ \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\ W\frac{x^2}{2} + A = -\frac{1}{4}\ Wx^2 + A \qquad (i)$$

يمكن ايجاد قيمة ثابت التكامل باستخدام شروط منتصف العارضة عندما $x = \tfrac{1}{2}L$ فان الميل $\frac{dy}{dx}$ يســاوي صفر

$$0 = -\frac{1}{4}W\left(\tfrac{1}{2}L\right)^2 + A$$

$$\therefore A = \frac{WL^2}{16}$$

عوّض عن قيمة A في المعادلة (i) وكامل مرة اخرى .

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}\ Wx^2 + \frac{WL^2}{16}$$

$$EIy = -\frac{Wx^3}{12} + \frac{WL^2 x}{16} + B$$

B = 0 ، بما ان الانحراف y يساوي صفر عند الاصل (عند x = 0) .

الانحراف الاقصى يحدث عند منتصف العارضة $\left(x = \tfrac{1}{2}L\right)$

$$y_{\max} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{W\left(\tfrac{1}{2}L\right)^3}{12} + \frac{WL^2\left(\tfrac{1}{2}L\right)}{16}\right] = \frac{WL^3}{48EI}$$