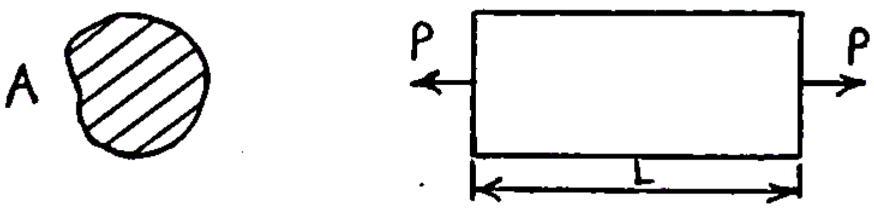
1- ميكانيكا المواد (مدخل)

Mechanics of Materials

يتناول هذا المقرر سلوك الإنشاءات وأعضاء الآلات عندما تتعرض إلي أحمال خارجية. وباختصار شديد يتناول القوانين التي تسمح بحساب الاجهادات والانفعالات بغرض عندم تجاوزها حد معين.

الإجهاد: الرسم (1.1) يوضِّح عضو معرَّض لحمل محوري مركز P. مساحة مقطع العضو A. يتعرَّض العضو في هذه الحالة لإجهاد شد σ يحسب بالقانون التالي:

$$\sigma = P / A \quad (N/mm^2)$$



الرسم (1.1)

الانفعال: العضو في الرسم (1.1) حتماً سيستطيل تحت تأثير حمل الشد P. فإذا كان طول العضو A والاستطالة ΔL، فإنَّ الانفعال يحسب من القانون:

$$\in = \Delta L / L$$

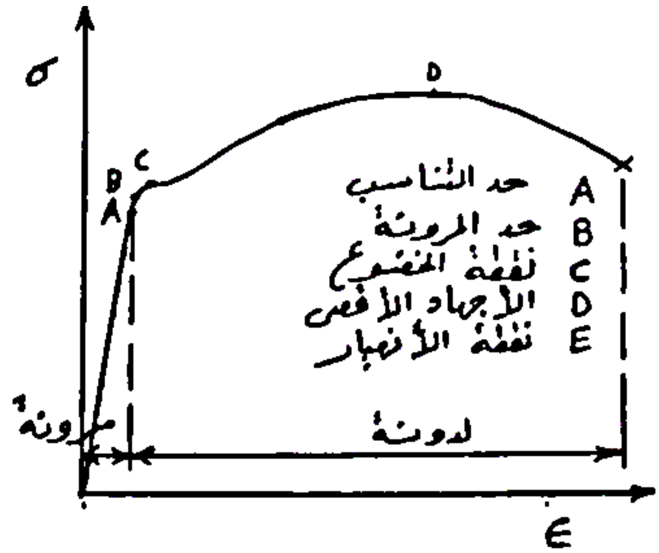
بالطبع إذا كان الحمل حمل ضغط سيكون الإجهاد إجهاد ضغط بدلاً من الاستطالة فإن العضو يتقلص في هذه الحالة.

قانون هوك: هذا القانون يبين أنَّ الانفعال يتناسب مع الإجهاد الذي ينتجه (هذا يحدث فعلياً إذا كان الإجهاد صغير نسبياً)، ويمكن صياغة هذا القانون هكذا:

$$E = \sigma / \in$$

E تسمي معاير المرونة ووحدات قياسها N/mm^2.

إختبار الشد: بتسليط حمل متدرج على قضيب وتسجيل الاستطالة يمكن رسم منحني الحمل – الاستطالة أو الإجهاد – الانفعال. ويختلف هذا المنحني من مادة لأخرى وأشهر هذه المواد وأكثرها استخداماً هي الصلب الطري ومنحناه كما في الرسم (1.2) أدناه:



الرسم 1.2

واضح أنَّ إمتداد اللدونة كبير جداً مقارنة بامتداد المرونة. والفرق بين المرونة واللدونة هو أنَّ المادة تتشوه في حدود المرونة قابلة للعودة إلي شكلها الأصلي بزوال المؤثر. وكلما أظهرت المادة قدرة على التشوه اللدن فإنَّها توصف مادة مطيلة وإلا فإنها تعتبر قصفة.

عامل السلامة: نسبة لأنَّ الإجهاد إذا زاد عن حد معين سيؤدي حتماً إلي تشوهات لدنة وكسر العضو، فإنَّ من الضروري التأكد من أنَّ في حدود مقبولة. ولأنَّ الأحمال أحياناً تكون غير معلومة بالضبط في مقدارها أو طريقة تسليطها فإنَّه يتم استخدام عامل سلامة لضمان عدم تجاوز الإجهاد المسموح به. وبالطبع فإنَّ عامل السلامة يكون دائماً أكبر من 1 وعامل السلامة يحسب من القانون التالي:

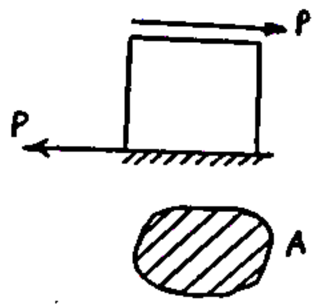
$$FS = \hat{\sigma} / \sigma_w$$

حيث أنَّ: $\hat{\sigma}$ هي الإجهاد الأقصى σ_w هي إجهاد التشغيل. وبدلاً من الإجهاد الأقصى يستخدم إجهاد الخضوع أحياناً.

إجهاد القص: في حالة العضو آنف الذكر نجد أنَّ الحمل محوري ولكن أحياناً يتعرض العضو لحملين متساويين في المقدار ولكن متضادين في الاتجاه في الرسم (3.1). في هذه الحالة ينشأ إجهاد يسمي إجهاد قص ويحسب من القانون:

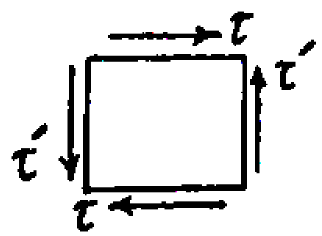
$$\tau = P / A$$

لاحظ أنَّ P و A متوازيتين.



الرسم (3.1)

إجهاد القص التكميلي: إذا أخذت عينة من عضو معرَّض لأحمال ولنفرض أنها تؤدي إلي نشوء إجهاد قص τ كما موضَّح في الرسم (4.1).



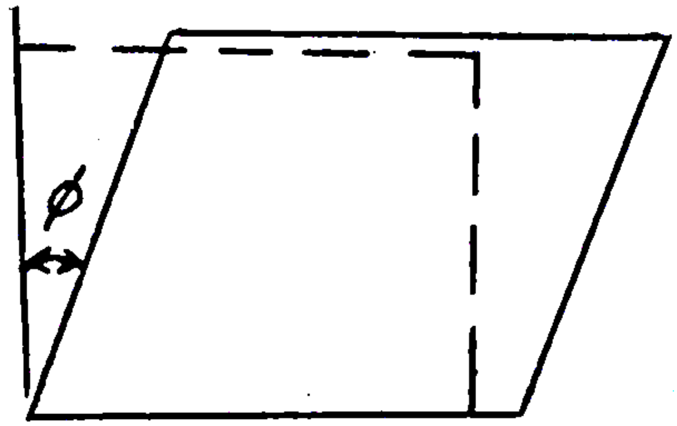
الرسم (4.1)

نجد أنَّ هنالك قص ينشأ في المادة لدواعي إتزان العينة. وهذا الإجهاد يسمي إجهاد القص التكميلي τ' حيث أنَّ τ = τ'.

إنفعال القص: تحت تأثير إجهاد القص تتشوه العينة بانزلاق طبقات المادة بعضها على بعض وبالتالي فإنَّ الزوايا القائمة لا تعود قائمة. ويعرف التغير في الزاوية القائمة بانفعال القص ϕ ويحسب من القانون:

$$\phi = \tau/G$$

وانفعال القص نسبة ولا وحدات لها وبالطبع يمكن أن تُقاس بالـ radius أو degrees.



الرسم (5.1)

معاير الجساءة: في حدود منخفضة لإجهاد القص، نجد أنَّ الإجهاد والانفعال متناسبين، ويمكن التعبير عن ذلك بالقانون:

$$G = \tau/\theta \qquad \left(N/mm^2\right)$$

حيث أنَّ G هي معاير الجساءة.

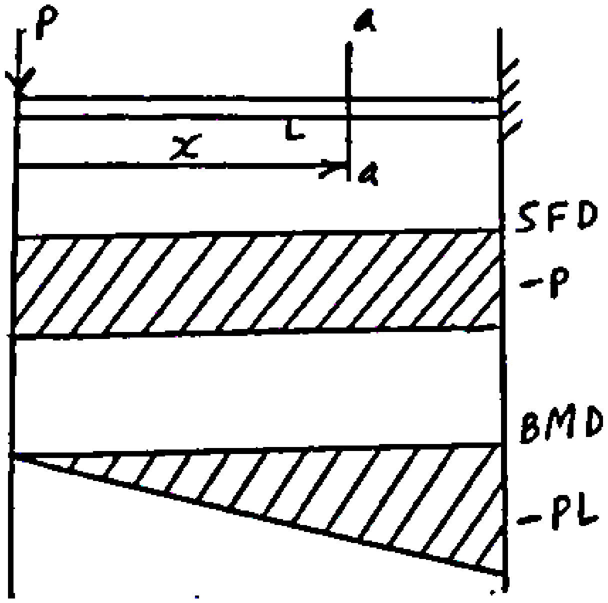
2- قوة القص وعزم الانحناء

قوة القص: قوة القص عند أي مقطع في عارضة هي مجموع القوى على أحد جانبي المقطع، وتمثل ميل أحد الجزئيين للانزلاق بالنسبة للطرف الآخر. الرسم البياني الذي يوضِّح تغيير في قوة القص على طول العارضة يعرف بمخطَّط قوة القص (سنأخذ القوة على يسار المقطع إلي أعلى موجب).

عزم الانحناء: عزم الانحناء عند أي مقطع في عارضة هو مجموع عزوم القوى على أحد جانبي المقطع. الرسم البياني الذي يوضِّح تغيير عزم الانحناء على طول العارضة يعرف بمخطَّط عزم الانحناء (سنأخذ العزم في اتجاه عقارب الساعة موجب).

مثال (1):

أرسم مخطِّط قوة القص وعزم الانحناء للعارضة الوتدية الموضحة في الرسم (1.2).



(أ) قوة القص عند المقطع a – a،

$$F = -P$$

إذن القوة القص ثابتة على طول العارضة.

(ب) عزم الانحناء عند المقطع a – a،

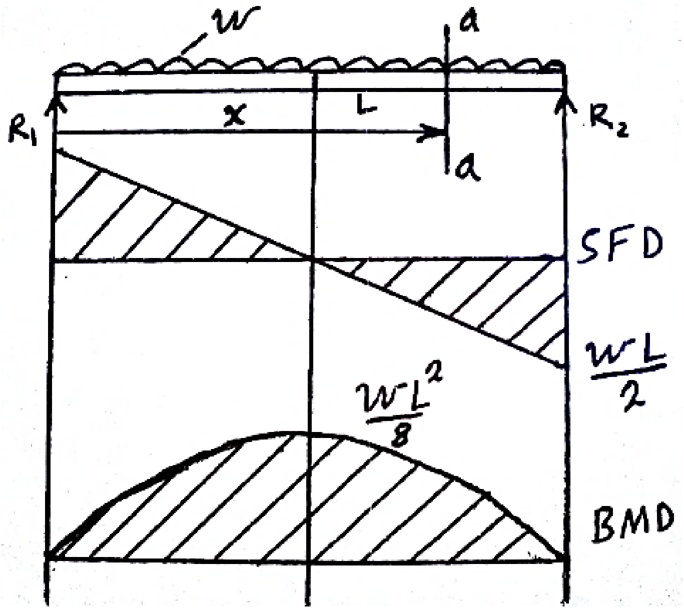
$$M = -Px$$

$$x = 0, \; M = 0$$

$$x = L, \; M = -PL$$

مثال (2):

أرسم مخطِّط قوة القص وعزم الانحناء لعارضة مسنودة إسناد بسيط وعليها حمل موزع بانتظام معدَّله w.



نسبة لتماثل الحمل فإنَّ ردى الفعل $R_1 = R_2 = wL/2$.

(أ) قوة القص عند المقطع a – a:

$$F = R_1 - wx = \frac{wL}{2} - wx$$

$$x = 0, \;\; F = \frac{wL}{2}$$

$$x = \frac{L}{2}, \;\; F = 0$$

$$x = L, \;\; F = -\frac{wL}{2}$$

(ب) عزم الانحناء عند المقطع a – a،

$$M = R_1 x - \frac{wx^2}{2} = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

$$x = 0, \; M = 0$$

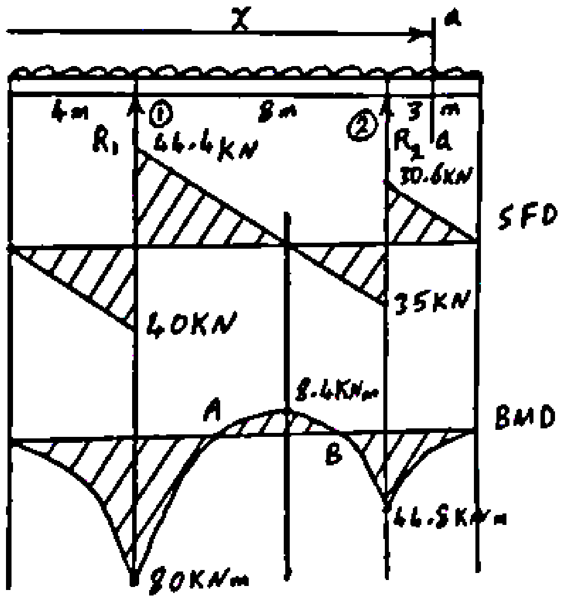
$$x = \frac{L}{2}, \; M = \frac{wL^2}{8}$$

$$x = L, \; M = 0$$

لاحظ في حالة الحمل الموزع أنَّ عزم الانحناء الأقصى يحدث عند المقطع الذي لا يتعرض لقوة قص. حاول الاستفادة من هذه المعلومة مستقبلاً.

مثال (3):

أرسم مخطِّط قوة القص وعزم الانحناء للعارضة الموضَّحة في الرسم (3.2).



أولاً: أحسب ردي الفعل R_1 و R_2،

خذ العزوم حول النقطة (2)،

$$\curvearrowleft + M = 0$$

$$8R_1+\frac{10\times3^2}{2}-\frac{10\times12^2}{2}=0$$

$$R_1=84.4\,kN$$

$$\uparrow+\sum F=0$$

$$84.4+R_2-10\times15=0$$

$$R_2=65.6\,kN$$

(أ) قوة القص عند المقطع a - a (في أقصى قسم للعارضة لليمين).

$$F=84.4[x-4]^2-10x+65.6[x-12]$$

$$x=0,\quad F=0$$

$$x=4m-,\quad F=-40kN$$

$$x=4m+,\quad F=44.4kN$$

$$x=12m-,\quad F=84.4-10\times12=-35.6kN$$

$$x=12m+,\quad F=30kN$$

$$x=15m,\quad F=84.4-10\times15+65.6=0$$

لاحظ أن استخدام القوس المربع هو نوع من الخداع والالتفاف حول الحل لإنجازه بطريقة سريعة. يجب عدم فك القوس المربع، كما يجب تجاهله إذا كانت القيمة بداخله أقل من صفر. يمكن بالطبع حساب قوة القص لدى مقطع متحرك. جرِّب ذلك بنفسك.

(ب) عزم الانحناء في المقطع a – a:

$$M=84.4[x-4]-\frac{10x^2}{2}+65.6[x-12]$$

القوس المربع هنا له نفس المعني الذي ورد سابقاً.

$$x=0,\quad M=0$$

$$x = 4m, \quad M = -5 \times 4^2 = -80kNm$$

$$x = 12m, \quad M = 84.4 \times 8 - 10 \times 12^2 = -44.8kNm$$

$$x = 15m, \quad F = 84.4 \times 11 - 5 \times 15^2 + 65.6 \times 3 = 0$$

من الواضح أنَّ هنالك قيمة قصوى لعزم الانحناء عند $4 < x < 12$ لإيجاد المقطع الذي يتعرض لزم انحناء أو قوة قص = صفر، نأخذ قوة القص عند $4 < x < 12$ من المعادلة واستبدال الأقواس المربعة بأقواس عادية:

$$F = 84.4 - 10x = 0$$

$$\therefore x = 8.4m$$

عوِّض في معادلة الانحناء،

$$M = 84.4(8.4 - 4) - 5 \times 8.4^2 = 18.6 \ kNm$$

وهكذا يمكن رسم مخطَّطي قوة القص وعزم الانحناء. النقطة A وB في مخطَّط عزم الانحناء تسمي نقطة الانقلاب وعندها يتغير العزم من موجب إلي سالب أو العكس. يمكن تحديد موضع نقطة بجعل عزم الانحناء صفراً.

$$M = 84.4(x - 4) - 5 \times x^2 = 0$$

$$x^2 - 16.8x + 67.2 = 0$$

$$x = 6.6m \ (A), \ \ or \ \ x = 12.2m(B)$$

مثال (4):

أرسم مخطِّط قوة القص وعزم الانحناء للعارضة الموضَّحة في الرسم.

$$\circlearrowleft \ +M = 0$$

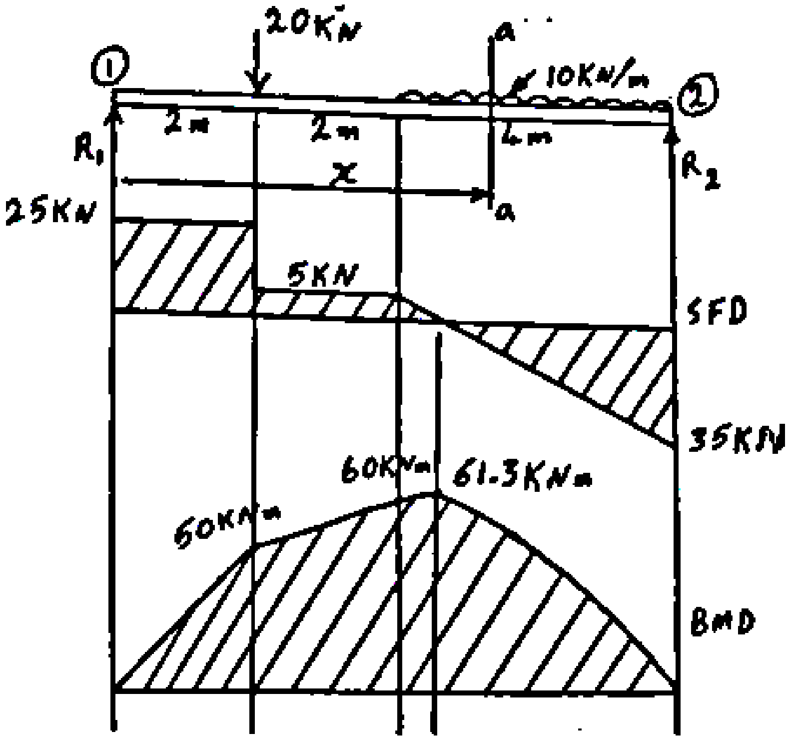
$$8R_1 + 20 \times 6 - 10 \times 4 \times 2 = 0$$

$$R_1 = 25kN$$

$\uparrow +F=0$

$25+R_2=20+40$

$R_2=35\,kN$



(أ) قوة القص عند المقطع a - a (في أقصى قسم للعارضة لليمين).

$F=25-20[x-2]^2-10[x-4]$

$x=0,\ \ F=-25kN$

$x=2m+,\ \ F=25-20=5kN$

$x=4m,\ \ F=5kN$

$x=12m+,\ \ F=25+20-10\times 4=-35kN$

(ب) عزم الانحناء في المقطع a – a:

$M=25x-20[x-2]-5[x-4]$

$x=0,\ \ M=0$

$x = 2m, \quad M = 25 \times 2 = 50kNm$

$x = 4m, \quad M = 25 \times 4 - 20 \times 2 = 60kNm$

$x = 8m, \quad F = 0$

هنالك قيمة قصوى 8 > x > 4،

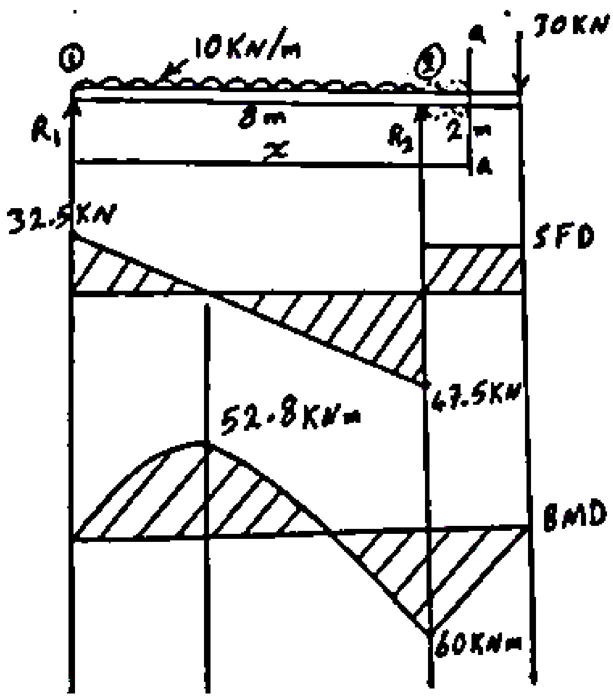
$F = 25 - 20 - 10(x-4) = 0$

$\therefore x = 4.5m$

$\hat{M} = 25 \times 4.5 - 20(4.5-2) - 5(4.5-4)^2 = 61.3kNm$

مثال (5):

أرسم مخطِّط قوة القص وعزم الانحناء للعارضة الموضَّحة في الرسم.



خذ $\curvearrowleft + M_{(2)} = 0$

$8R_1 + 30 \times 2 - 10 \times 8 \times 4 = 0$

$R_1 = 32.5kN$

$\uparrow + F = 0$

$$32.5 + R_2 = 10 \times 8 + 30$$

$$R_2 = 77.5\,kN$$

خذ المقطع a – a كالعادة في لأقصى قسم لليمين وصل الحمل من أعلا حتى المقطع وأضف حمل مناسب من الأسفل (هذه خدعة من أجل الحل).

(أ) قوة القص عند المقطع a – a :

$$F = 32.5 - 10x + 10[x-8] + 77.5[x-8]$$

$$x = 0, \quad F = 32.5kN$$

$$x = 8m-, \quad F = 32.5 - 10 \times 8 = -47.5kN$$

$$x = 8m+, \quad F = 32.5 - 10 \times 8 + 77.6 = 30kN$$

(ب) عزم الانحناء في المقطع a – a:

$$M = 32.5x - 5x^2 - 5[x-8]^2 - 77.5[x-8]$$

$$x = 0, \quad M = 0$$

$$x = 8m, \quad M = -60kNm$$

$$x = 10m, \quad M = 0$$

هنالك قيمة قصوى $0 < x < 8$،

$$F = 32.5 - 10x = 0$$

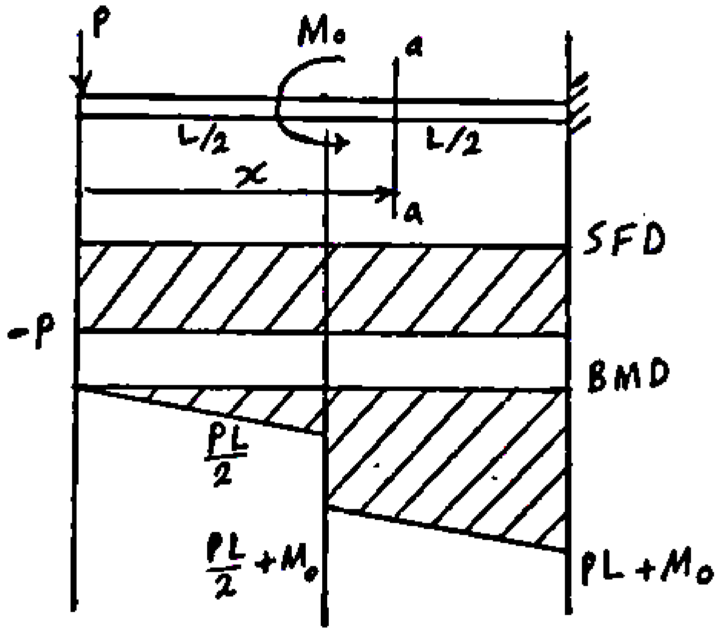
$$\therefore x = 3.25m$$

$$\hat{M} = 32.5 \times 3.25 - 5 \times 3.25^2 = 52.8kNm$$

حاول لوحدك إيجاد نقطة الانقلاب.

مثال (6):

أرسم مخطِّط قوة القص وعزم الانحناء للعارضة الموضَّحة في الرسم.



(أ) قوة القص عند المقطع a – a :

$$F = -P$$

(ب) عزم الانحناء في المقطع a – a:

$$M = -Px - M[x - L/2]$$

$$x = 0,\ \ M = 0$$

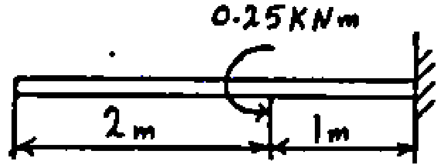
$$x = \frac{L}{2}-,\ \ M = -\frac{PL}{2}$$

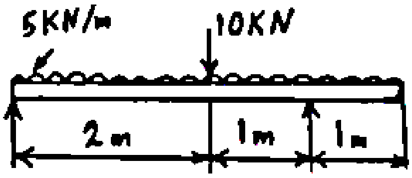
$$x = \frac{L}{2}+,\ \ M = -\frac{PL}{2} - M_o$$

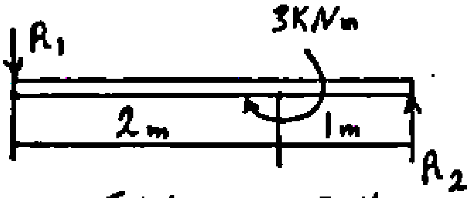
$$x = L,\ \ \ M = -PL - M_o$$

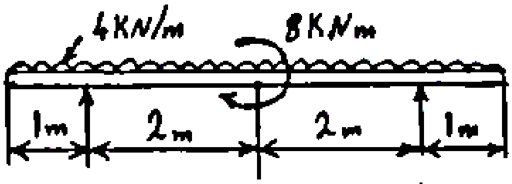
تمرين:

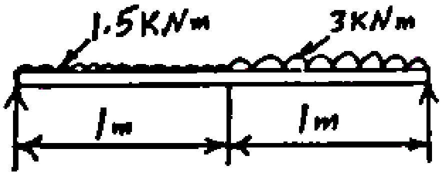
أرسم مخطَّطات قوى القص وعزم الانحناء للعارضات في الرسوم التالية. أوجد القيم القصوى لقوى القص وعزم الانحناء في كل حالة. أوجد أيضاً مواضع نقاط الانقلاب إن وُجِدت.

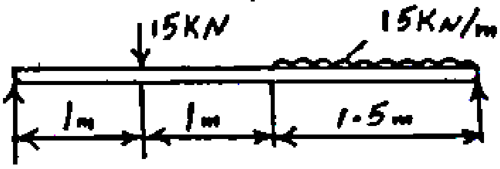

0.25KNm
2m
1m

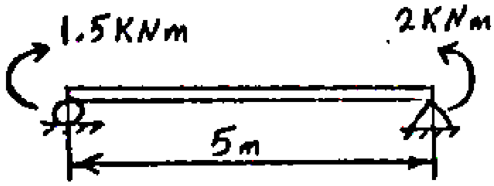

5KN/m
10KN
2m
1m
1m

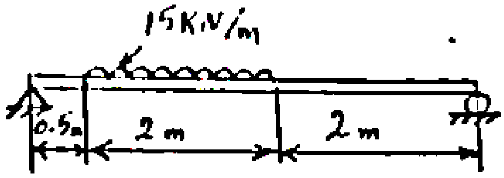

R1
3KNm
2m
1m
R2

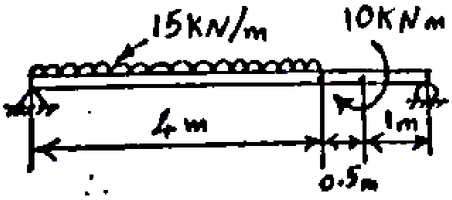

4KN/m
8KNm
1m
2m
2m
1m

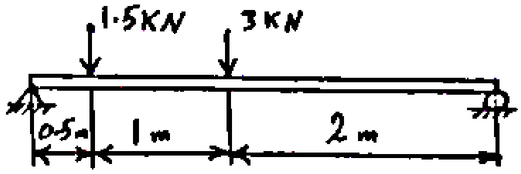

1.5KNm
3KNm
1m
1m


15KN
15KN/m
1m
1m
1.5m

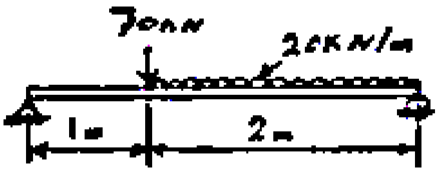

1.5KNm
2KNm
5m

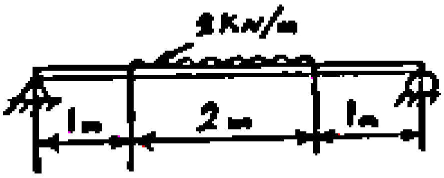

15KN/m
0.5m
2m
2m

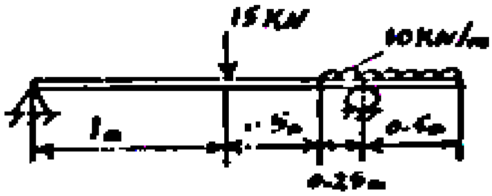

15KN/m
10KNm
4m
1m
0.5m


1.5KN
3KN
0.5m
1m
2m


5KN
3KN
1m
1m
0.5m


20KN/m
1m
2m

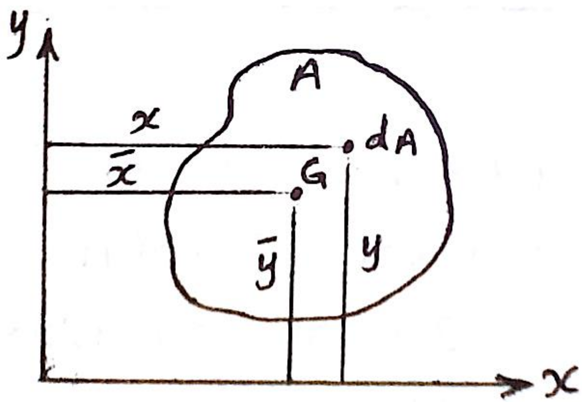

1m
2m
1m


15KN
10KN/m
1m
0.5m
0.5m
0.25m


1KN/m
0.5KN/m
5m
5m
3m

3- عزم المساحة

1- العزم الأول للمساحة:



العزم الأول للمساحة A حول المحور y، Q_y

$$Q_y = \int_A x \; dA$$

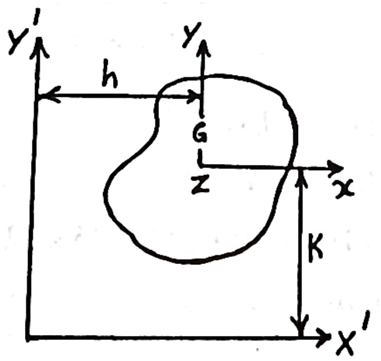
العزم الأول للمساحة A حول المحور x، Q_x

$$Q_x = \int_A y \; dA$$

يُستفاد من العزم الأول في تحديد مركز المساحة $(\bar{x}, \bar{y})$،

$$\bar{x} = Q_y / A, \qquad \bar{y} = Q_x / A$$

2- العزم الثاني للمساحة:



العزم الثاني للمساحة A حول المحور y، I_y،

$$I_y = \int_A x^2 \; dA$$

العزم الأول للمساحة A حول المحور x، I_x،

$$I_x = \int_A y^2 \; dA$$

3- نظرية المحاور المتوازية:

هذه النظرية يمكن التعبير عنها رياضياً هكذا:

$$I_{x'} = I_x + Ak^2$$

$$I_{y'} = I_y + Ak^2$$

لاحظ أنَّ x، y يمران بمركز المساحة G.

نظرية المحاور المتعامدة:

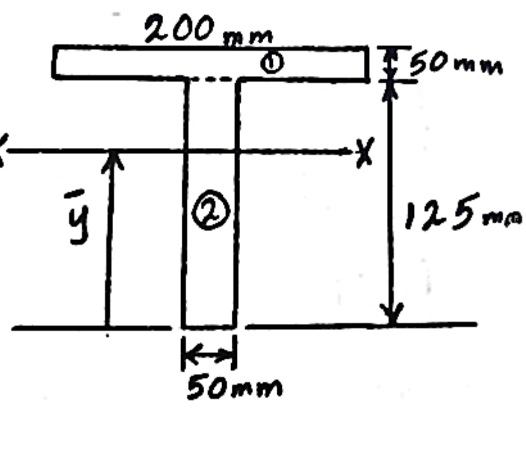
هذه النظرية يمكن التعبير عنها كما يلي:

$$I_z = I_x + I_y$$

و I_z يسمي العزم القطبي ويُرمز له عادة بالحرف J.

مثال(1):

أوجد العزم الثاني للمساحة للمقطع الموضَّح أدناه حول محور يمر بمركز المساحة.



أولاً أوجد مركز المساحة $\bar{y}$. خذ العزم الأول للمساحة حول محور يمر بقاعدة المقطع. لاحظ أننا قسمنا المقطع إلاي مستطيلين (1) و(2).

$$(A_1 + A_2)\bar{y} = A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_1$$

$$= 200\times 50\times 150 + 125\times 50\times 62.5 \qquad (200\times 50 + 125\times 50)\bar{y}$$

$$\bar{y} = 116.3mm$$

ثانياً باستخدام نظرية المحاور المتوازية أوجد العزم الثاني للمساحة،

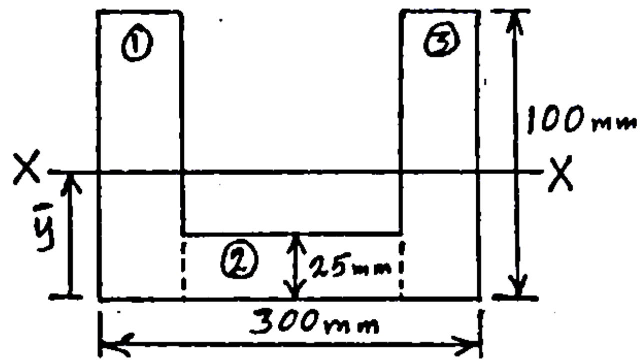
$$I_x = \frac{200\times 50^3}{12} + 200\times 50(150 - 116.3)^2$$

$$+ \frac{50\times 125^3}{12} + 50\times 125(116.3 - 62.5)^2$$

$$I_x = 40.10^6\, mm^4$$

مثال(2):

أوجد العزم الثاني للمساحة للمقطع الموضَّح أدناه حول محور يمر بمركز المساحة.



أولاً أوجد مركز المساحة $\bar{y}$. خذ العزم الأول للمساحة حول محور يمر بقاعدة المقطع.

$$(2A_1 + A_2)\bar{y} = 2A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_1$$

$$(2\times 25\times 1000 + 250\times 25)\bar{y}$$

$$= 25\times 1000\times 50 + 250\times 25\times 12.5$$

$$\bar{y} = 37.5mm$$

ثانياً العزم الثاني للمساحة حول المحور x - x،

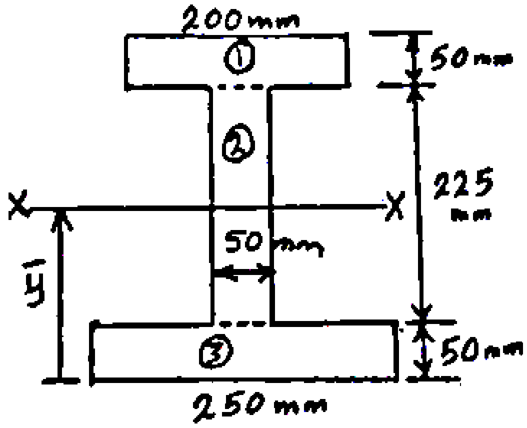
$$I_x = 2\left[\frac{25\times100^3}{12} + 25\times100(50-37.5)^2\right]$$

$$+\frac{250\times25^3}{12} + 250\times25(37.5-12.5)^2$$

$$I_x = 16.5.10^6\,mm^4$$

مثال(3):

أوجد العزم الثاني للمساحة حول محور يمر أفقي بمركز المساحة.



خذ العزم الأول للمساحة حول محور يمر بقاعدة المقطع.

$$(A_1 + A_2 + A_3)\bar{y} = A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2 + A_3\bar{y}_3$$

$$(200\times50 + 225\times50 + 250\times50)\bar{y}$$

$$= 200\times50\times300 + 225\times5 + +162.5 + 250\times50\times25$$

$$\bar{y} = 152.3mm$$

$$I_x = \frac{200\times50^3}{12} + 200\times50(300-152.3)^2$$

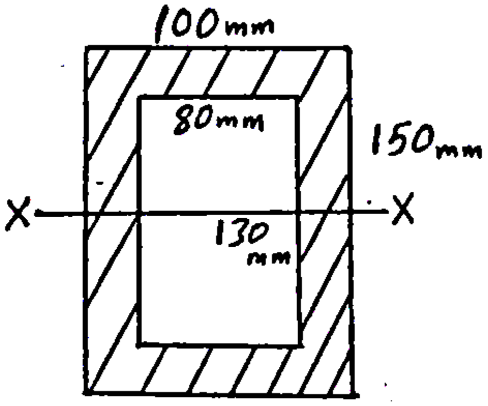
$$+\frac{50\times225^3}{12} + 50\times225(162.3-152.3)^2$$

$$+\frac{250\times50^3}{12} + 250\times50(152.3-25)^2$$

$$I_x = 4.8.10^6\,mm^4$$

مثال(3):

أوجد العزم الثاني للمساحة للمقطع المجوف الموضَّح أدناه حول محور أفقي يمر بمركز المساحة.



لأن المقطع متماثل فإنَّ المحور سيكون في الوسط تماماً، يمكن حساب العزم الثاني للمساحة

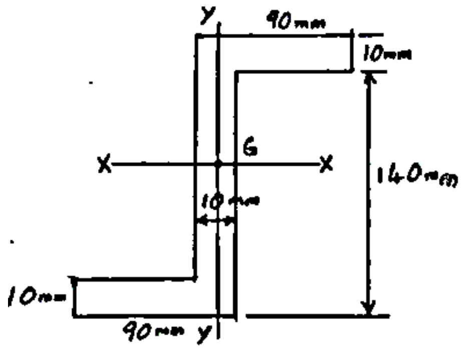
بطريقة الطرح هكذا،

$$I_x = \frac{100 \times 150^3}{12} - \frac{80 \times 130^3}{12}$$

$$I_x = 13.5.10^6 \, mm^4$$

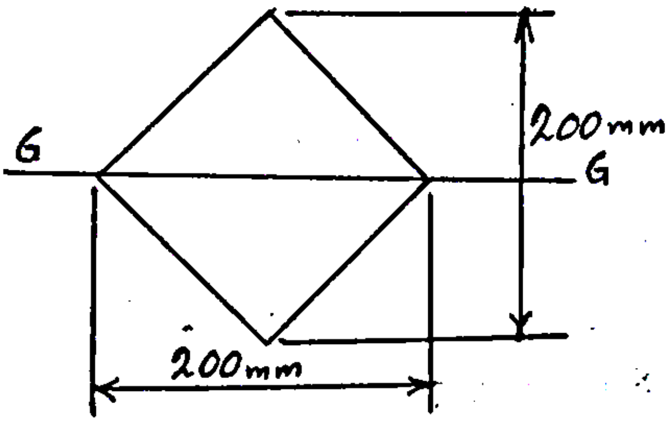
تمرين:

1. أوجد I_x و I_y للمقطع في الرسم.



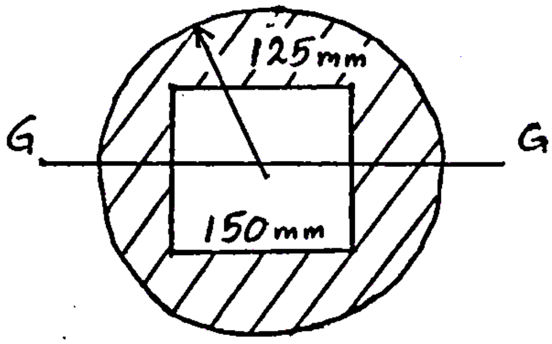
Ans. ($4.1.10^6 mm^4$, $10.7.10^6 mm^4$)

2. أوجد العزم الثاني للمساحة للمقطع أدناه حول G – G.



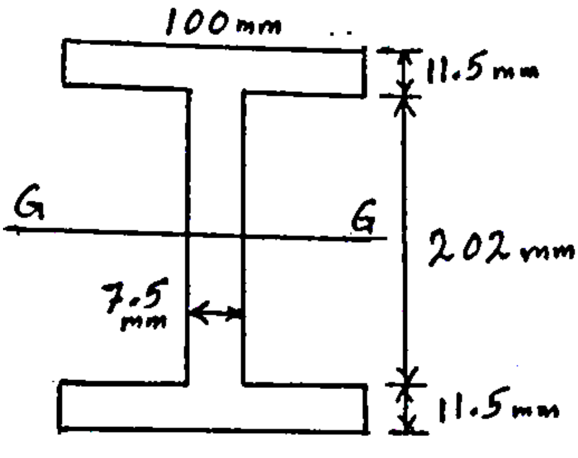
Ans. ($33.33.10^6 mm^4$)

3. أوجد العزم الثاني للمساحة في المقطع أدناه حول المحور G – G (المقطع عبارة عن مربع داخل دائرة).



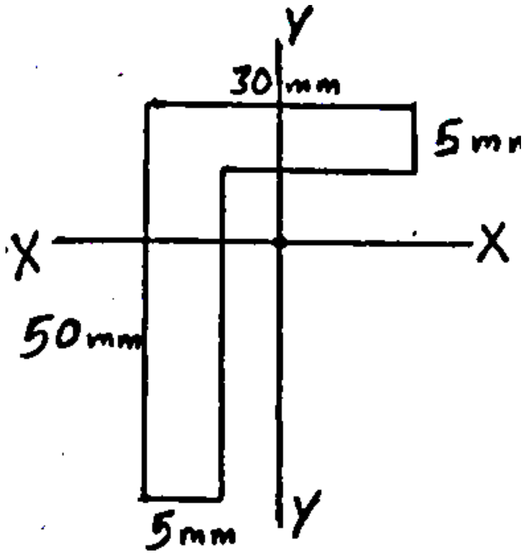
Ans. ($150.10^6 mm^4$)

4. . أوجد العزم الثاني للمساحة حول المحور G – G.



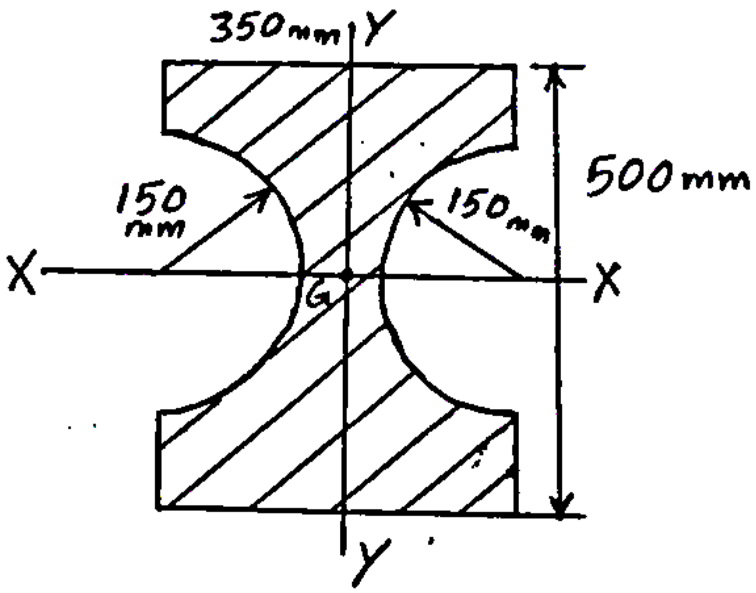
Ans. ($31.10^6 mm^4$)

5. أحسب العزم الثاني للمساحة I_x و I_y للمقطع .



Ans. ($2.58.10^4 mm^4$)

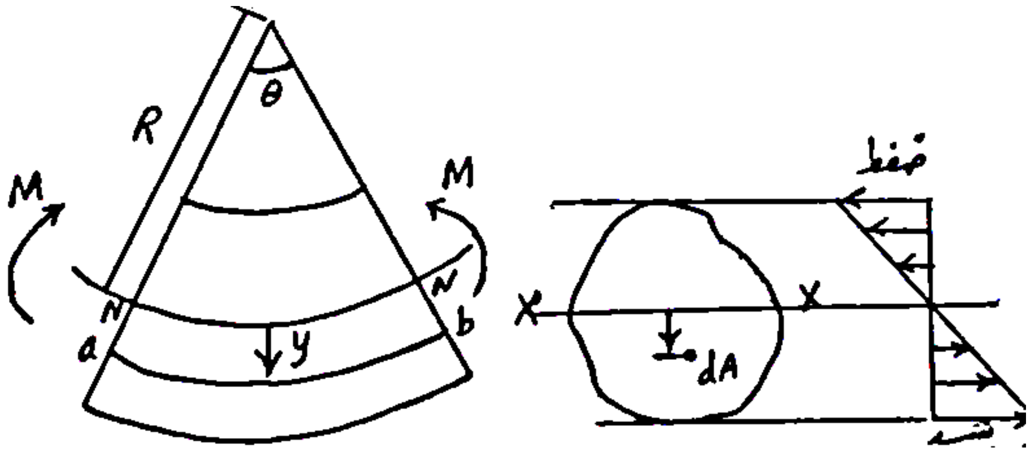
6. أحسب العزم الثاني للمساحة حول x – x و y – y.



Ans. ($32.5.10^4 mm^4$, $8.10^4 mm^4$)

4- إجهاد الانحناء

إذا تعرَّض قسم من عارضة إلي عزم انحناء ثابت (بمعني أنَّ قوة القص تساوي صفراً) فإنَّ شرائح من العارضة ستكون في حالة ضغط بينما أخرى في حالة شد. وهذا يعني أنَّ هنالك شريحة في الوسط تكون خالية من الإجهادات. وهذه الشريحة تكون عند سطح التعادل.



فرضيات:

1. المادة المتجانسة ومتشابهة الخواص، ولها نفس معاير المرونة في حالة الشد والضغط.
2. العارضة مستقيمة أصلاً، وكل شرائحها الطويلة تنحتي في شكل أقواس لها نفس المركز.
3. المقاطع العرضية تظل مستوية وقائمة على سطح التعادل بعد الانحناء.
4. نصف قطر التقويسة كبير مقارنة بأبعاد المقطع.
5. الإجهاد الناشئ إجهاد طولي مع تجاهل تأثير الأحمال المركزة.

من الرسم أعلا نحصل على:

$$\frac{\sigma}{E} = \in = \frac{ab - NN}{NN}$$

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{(R+y)\theta - R\theta}{R\theta} = \frac{y}{R}$$

لاحظ أنَّ القوة العمودية على المقطع تساوي صفراً وبالتالي،

$$\int_A \sigma \, dA = 0$$

$$\frac{E}{R}\int_A y \, dA = 0$$

عليه فإنَّ المحور $x - x$ يمر عبر مركز مساحة المقطع.

ثانياً إنَّ عزم الانحناء في حالة اتزان مع القوى العمودية.

$$M = \int_A \sigma \, y \, dA$$

$$= \frac{E}{R}\int_A y^2 \, dA = \frac{EI}{R}$$

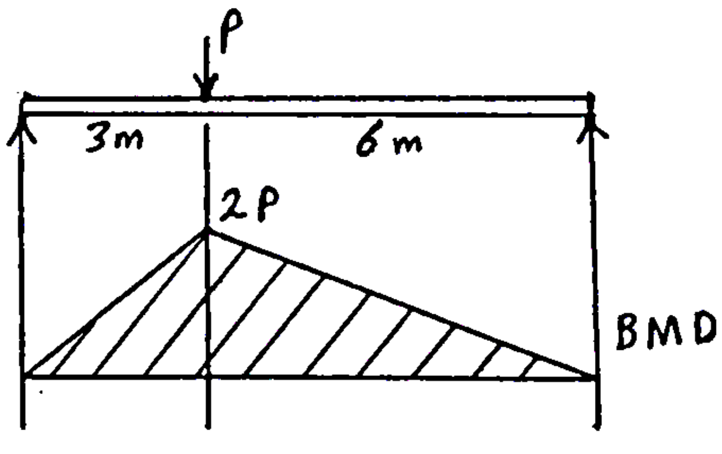
$$\frac{M}{I} = \frac{E}{R}$$

وهكذا يمكن صياغة القانون التالي:

$$\frac{\sigma}{y} = \frac{M}{I} = \frac{E}{R}$$

مثال (1):

عارضة لها مقطع شكل I مسنودة إسناد بسيط على بعد 9m. إذا كان الإجهاد المسموح به $75 N/mm^2$، ما هو الحمل المركز الذي يمكن تسليطه على مسافة 3m من أحد المسندين. عمق العارضة 225mm و $I=31.10^6 mm^4$.



الحل:

$$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{y}} = \frac{\hat{M}}{I}$$

$$\frac{75}{112.5} = \frac{2P \times 10^6}{31.10^6}$$

$$P = 10.3\,kN$$

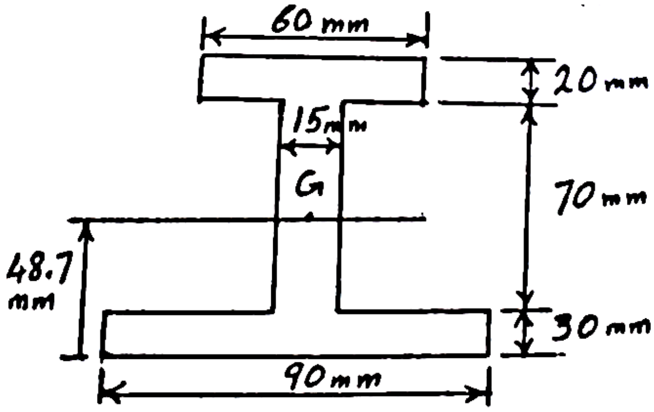
مثال(2):

مقطع عارضة مصنوعة من الحديد الزهر كما موضَّح في الرسم. الحمل يقع في مستوي الوترة. القسم العلوي من المقطع في حالة ضغط. إذا كانت الإجهادات المسموح بها في الشد $200N/mm^2$. والضغط $300N/mm^2$. أوجد العزم المناسب $I=8.53.10^6mm^4$.

الحل:

$$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{y}} = \frac{\hat{M}}{I}$$

(أ) في حالة الشد $\hat{y} = 48.7mm$ و $\hat{\sigma} = 200N/mm^2$:



$$\frac{200}{48.7} = \frac{\hat{M}.10^6}{8.53.10^6}$$

$$\hat{M} = 35.0\,kNm$$

(أ) في حالة الضغط $\hat{y} = 71.3mm$ و $\hat{\sigma} = 300N/mm^2$:

$$\frac{300}{71.3} = \frac{\hat{M}.10^6}{8.53.10^6}$$

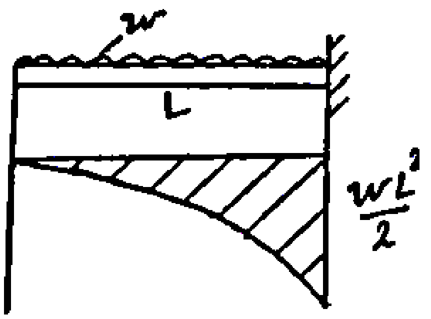
$$\hat{M} = 35.9\,kNm$$

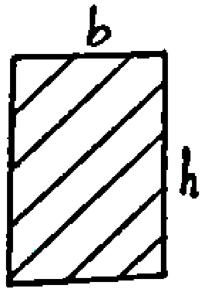
إذن عزم الانحناء المناسب 35kNm.

مثال(3):

عارضة وتدية طولها 3m مسلَّط عليها حمل موَّزع بانتظام معدَّله 30kN/m. الإجهاد المسموح به في الشد والضغط $150 N/mm^2$. إذا كان المقطع مستطيل، أوجد أبعاده بحيث يكون الارتفاع ضعف العرض.

الحل:





$$\hat{M} = \frac{wL^2}{2} = \frac{30\times 3^2}{2} = 135kNm$$

$$I = \frac{bh^2}{12} = \frac{b}{12}(2b)^2 = \frac{2b_4}{3}$$

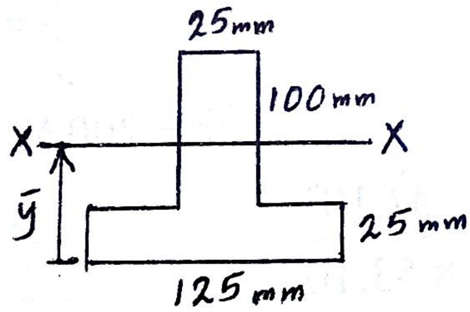
$$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{y}} = \frac{\hat{M}}{I}$$

$$\frac{150}{b} = \frac{135.10^6}{2b^4/3}$$

$$b = 110mm, \quad h = 220mm$$

مثال (4):

عارضة مقطعها على شكل T مقلوب كما وضَّح في الرسم. عند مقطع معين سُلط عزم إنحناء 5kNm بحيث تكون الشفة مشدودة. أوجد إجهاد الشد الأقصى وموضعه وإجهاد الضغط الأقصى وموضعه.



الحل:

أولاً: أوجد مركز المساحة تأكد من أنَّ $\bar{y} = 40.3mm$.

ثانياً: أوجد العزم الثاني للمساحة حول المحور $x - x$.

$$I = 7.7.10^{6} mm^{4}$$

$$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{y}} = \frac{\hat{M}}{I}$$

في حالة الشد $\bar{y} = 40.3mm$ ،

$$\frac{\hat{\sigma}}{40.3} = \frac{5.10^{6}}{7.7.10^{6}}$$

$$\therefore \hat{\sigma} = 26.2 N/mm^{2}$$

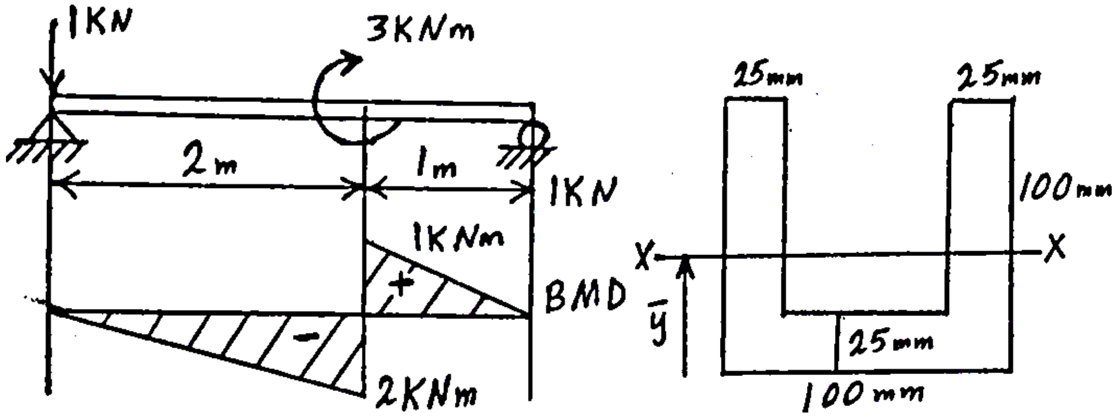
في حالة الشد $\bar{y} = 84.7mm$ ،

$$\frac{\hat{\sigma}}{84.7} = \frac{5.10^{6}}{7.7.10^{6}}$$

$$\therefore \hat{\sigma} = 55 N/mm^{2}$$

مثال(5):

عارضة مسنودة إسناد بسيط مسلَّط عليها عزم مركز 3kNm كما موضَّح في الرسم. العارضة مقطعها على شكل مجرى. أوجد إجهاد الشد والضغط الأقصيين في العارضة.



الحل:

أولاً: أرسم مخطَّط عزم الانحناء.

ثانياً: أوجد مركز مساحة المقطع $\bar{y} = 37.5mm$.

ثالثاً: أحسب العزم الثاني للمسحة حول x – x، $I=165.10^6 mm^4$.

(أ) عند x = 2m، M=2kNm.

في هذه الحالة الحافة العليا مشدودة والسفلي مضغوطة، وعليه في الحافة العليا،

$$\sigma = \frac{M}{I} y = \frac{2.10^6 \times 87.5}{165.10^6} = 10.6 N/mm^2 \qquad \text{(شد)}$$

وفي الحافة السفلي،

$$\sigma = \frac{2.10^6 \times 37.5}{165.10^6} = 4.5 N/mm^2 \qquad \text{(ضغط)}$$

(ب) عند +x = 2m، ، M=1kNm.

في هذه الحالة الحافة العليا مضغوطة والسفلي مشدودة، وعليه في الحافة العليا،

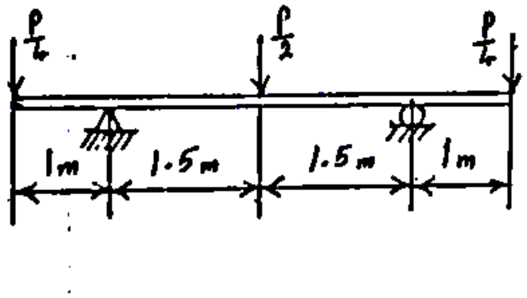
$$\sigma = \frac{1.10^6 \times 87.5}{165.10^6} = 5.3 N/mm^2 \qquad \text{(ضغط)}$$

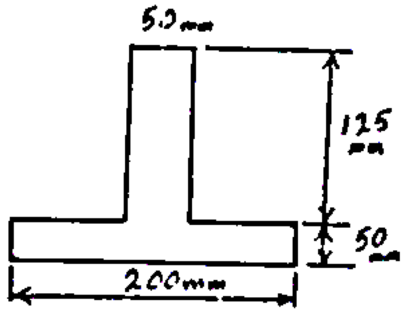
وفي الحافة السفلي،

$$\sigma = \frac{1.10^6 \times 37.5}{165.10^6} = 2.25 N/mm^2 \qquad \text{(شد)}$$

تمرين:

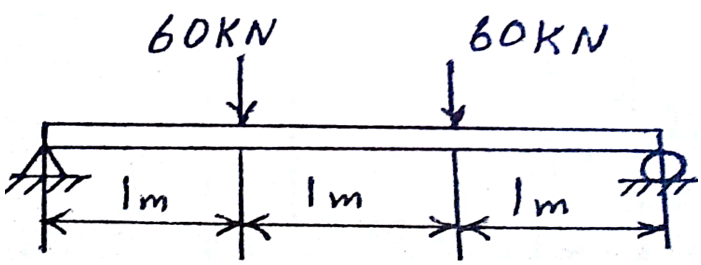
1. عارضة مسنودة إسناد بسيط مقطعها على شكل T (أنظر الرسم). إذا كانت العارضة مصنوعة من الحديد الزهر له إجهاد في الشد $35N/mm^2$ وفي الضغط $150N/mm^2$، أوجد أقصى قيمة للحمل P.





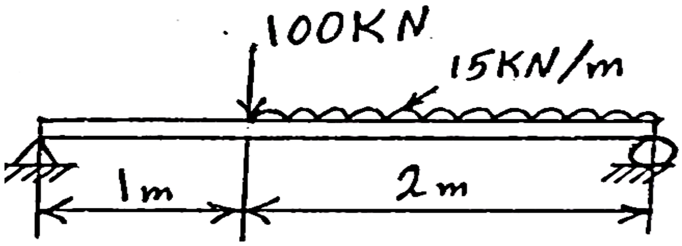
Ans. (48.3kN)

2. العارضة الموضَّحة في الرسم أدناه مسنودة إسناد بسيط عن طرفيها وعليها حملان متماثلان كل منهما 60kN. إذا كان إجهاد التشغيل في الشد والضغط $125N/mm^2$، كم يكون العزم الثاني للمساحة لمقطع عمقه 250mm.



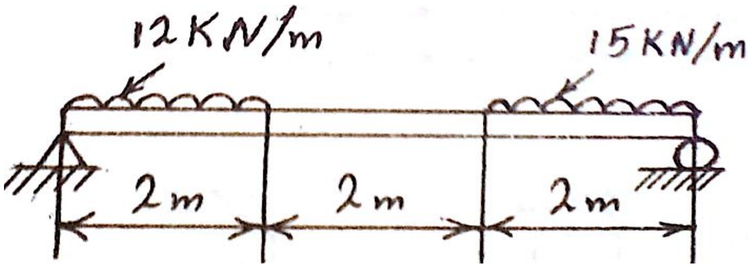
Ans. ($60.10^6 mm^2$)

3. عارضة مسنودة إسناد بسيط عليها حمل مركز وآخر موزَّع بانتظام كما في الرسم. إذا كان إجهاد التشغيل والضغط $150N/mm^2$، أوجد معاير المقطع إذا كان هنالك مقطعان متوفران أحدهما عمقه 250mm والآخر 300mm وكلاهما له نفس المعاير، فأيهما تختار لهذه العارضة.



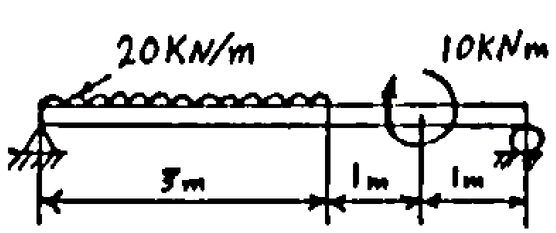
Ans. ($300mm, 0.51.10^6mm^4$)

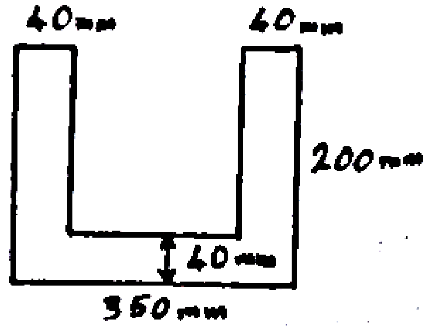
4. عارضة مسنودة إسناد بسيط مسلَّط عليها حملان موزعان بانتظام (الرسم). عمق المقطع 200mm، والعزم الثاني للمساحة حول محور الانحناء $38.2.10^6mm^4$. أوجد قيمة وموضع إجهاد الانحناء الأقصى.



Ans.($59N/mm^2$ على بعد 1.733m من المسند اليمين)

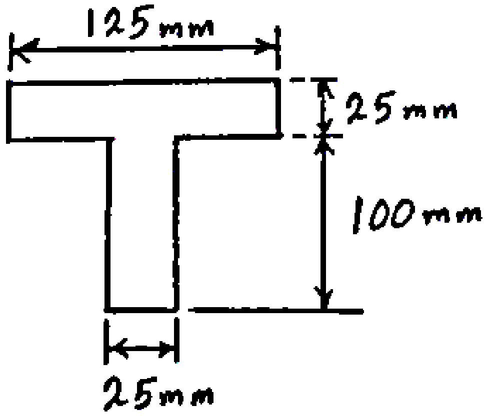
5. عارضة مسنودة إسناد بسيط لها مقطع على شكل مجرى مسلَّط عليها حمل موزَّع بانتظام بالإضافة إلي عزم مركز (أنظر الرسم). أوجد إجهادي الشد والضغط الأقصيين.





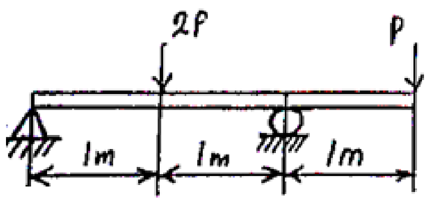
Ans. (56.8N/mm^2, 31.2N/mm^2)

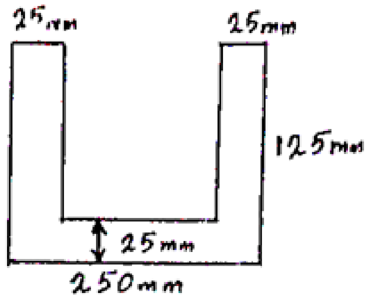
6. عارضة وتدية مقطعها على شكل T (أنظر الرسم) طولها 2m مسلط عليها حمل موزَّع بانتظام معدَّله 8kN/m. أوجد إجهادي الشد والضغط الأقصيين.



Ans. (81N/mm^2, 38.2N/mm^2)

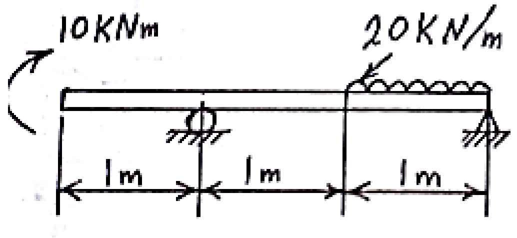
7. عارضة لها مقطع على شكل مجرى محمَّلة كما في الرسم. المادة حديد زهر لها إجهاد شد 35N/mm^2 وإجهاد ضغط 150N/mm^2. أوجد القيمة القصوى للحمل P.

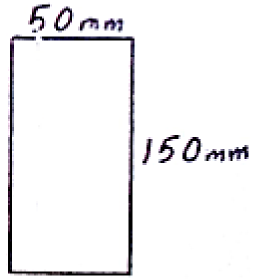




Ans. (6.3kN)

8. أوجد إجهاد الإنحناء الأقصى للعارضة الموضَّحة في الرسم.

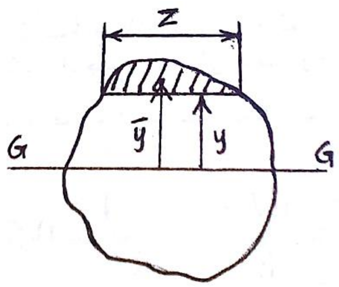




Ans. ($30N/mm^2$)

5- إجهاد القص في العارضات

قوة القص عند أي مقطع على العارضة تؤدي إلي نشوء إجهاد قص على المقاطع العرضية يتغير عادة من نقطة لأخرى، وعلى سبيل المثال المقطع في الرسم أدناه معرَّض لقوة قص F.

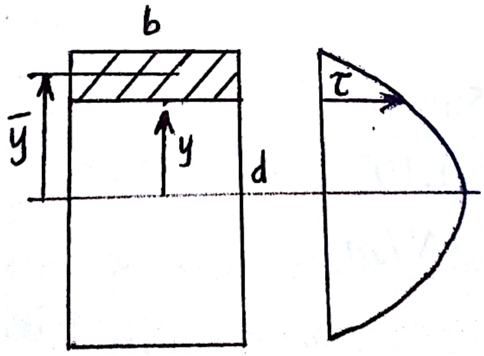


إجهاد القص على بعد y من المحور G – G الذي يمر بمركز المساحة يحسب من القانون (حاول استنتاجه بنفسك).

$$\tau = F\,\frac{A\bar{y}}{ZI}$$

حيث أنَّ F قوة القص، $A\bar{y}$ العزم الأول للمساحة المظللة التي تلى المقطع وعرضه Z، I العزم الثاني للمساحة حول محور يمر بمركز المساحة.

1. مقطع مستطيل:



$$A = b\left(\frac{d}{2} - y\right)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2} - y\right) + y$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2} + y\right)$$

$$A\bar{y} = \frac{b}{2}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - y\right]$$

$$I = \frac{bd^3}{12}, \quad z = b$$

وبالتعويض نحصل على،

$$\tau = \frac{6F}{bd^3}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - y^2\right]$$

وبالتالي توزيع الإجهادات كما موضَّح في الرسم.

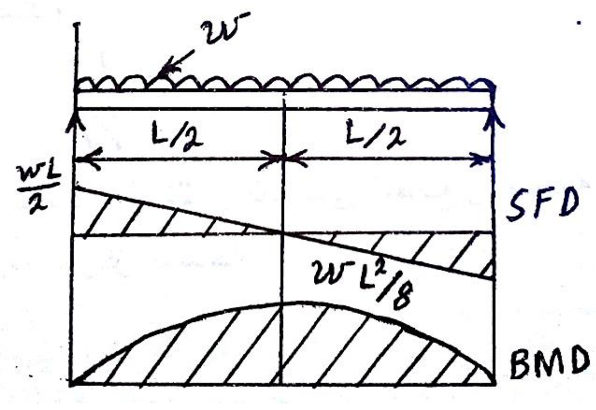
وإجهاد القص الأقصى $\tau = 1.5F/bd$.

إذن $\hat{\tau} = 1.5\tau_{ay}$.

مثال(1):

عارضة خشبية طولها 2m مسلَّط عليها حمل موزع بانتظام. مقطع العارضة مستطيل عرضه 10mm وعمقه 150mm. إذا كان الإجهاد الطولي المسموح به $28N/mm^2$ وإجهاد القص العرضي $2N/mm^2$، أحسب أقصى حمل يمكن تسليطه.

الحل:



$$\hat{M} = \frac{wL^2}{8} = \frac{w \times 4}{8} = 0.5w\,kNm$$

$$\hat{F} = \frac{wL}{2} = \frac{w \times 2}{2} = w\,kNm$$

(أ) الإجهاد الطولي:

$$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{y}} = \frac{\hat{M}}{I}$$

$$\frac{28}{75} = \frac{0.5w.10^6}{28.1.10^6}$$

$$\therefore w = 21kN/m$$

(ب) إجهاد القص العرضي:

$$\hat{\tau} = 1.5\frac{F}{bd}$$

$$2 = \frac{1.5w.10^3}{100 \times 150}$$

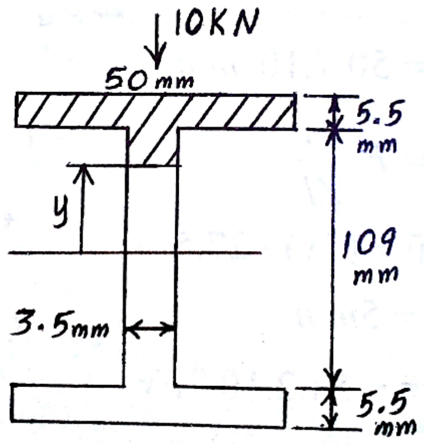
$$\therefore w = 20kN/m$$

إذن أقصى حمل يمكن تسليطه 20kN/m.

مثال (2):

أحسب قيمة إجهاد القص العرضي عند محور التعادل وعند أعلى الوترة، وقارن معهما متوسط إجهاد القص على افتراض توزيع منتظم للإجهادات على الوترة. ما هي النسبة المئوية من قوة القص محمولة بواسطة الوترة.

الحل:



$$I = 220.10^4 mm^4, \quad A = 9.4.10^2 mm^2$$

$$A\bar{y} = 50\times 5.5\times 57.25 + (54.5 - y)\times \frac{0.35}{2}(54.5 + y)$$

$$A\bar{y} = 209.5 - 1.75y$$

$$\tau = \frac{FA\bar{y}}{ZI}$$

$$\tau = \frac{10.10^3\left(209.5 - 1.75y^2\right)}{3.5\times 220.10^4}$$

$$y = 0, \qquad \tau = 27.2N/mm^2$$

$$y = 54.5, \quad \tau = 20.1N/mm^2$$

على افتراض أنَّ إجهاد القص على الوترة منتظم،

$$\tau_{av} = \frac{10.10^3}{3.5\times 109} = 26.2N/mm^2$$

إذن إجهاد القص الأقصى يزيد عن متوسط إجهاد القص بنسبة Pr_1، حيث أنَّ،

$$Pr_1 = \frac{27.2 - 20.2}{20.2}\times 100 = 3.7\%$$

بينما إجهاد القص في أعلى الوترة يقل عن متوسط إجهاد الأقصى بنسبة Pr_2، حيث أنَّ،

$$Pr_2 = \frac{26.2 - 20.1}{20.1}\times 100 = 30.3\%$$

قوة القص المحمولة بواسطة الوترة،

$$F_w = \int_{-d/2}^{d/2} \tau\ bd\ dy = \int_{-54.5}^{54.5} \frac{3.5\times 10\left(209.5 - 1.75y^2\right)dy}{3.5\times 220.10^4}$$

$$F_w = 9.5kN$$

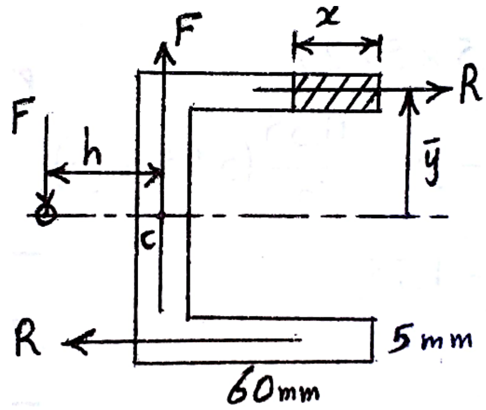
إذن قوة القص المحمولة بواسطة الوترة تساوي 95% من قوة القص الكلية.

مركز القص: هذا المركز له علاقة بالمقاطع غير المتماثلة مثل الزاوية والمجرى. ومثل هذه المقاطع إذا استخدمت كعارضة فإنها بالإضافة للانحناء فإنها تلتوى إلا إذا سلط الحمل عند مركز القص.

مثال(3):

أوجد مركز القص للمقطع المجرى الموضَّح في الرسم.

الحل:



$$I = 50.7.10^4\,mm^4$$

$$\tau = F\,\frac{A\bar{y}}{ZI}$$

$$A\bar{y} = (5x) \times 27.5$$

$$Z = 5mm$$

$$\therefore \tau = 54.2.10^{-6}\,Fx$$

$$R = \int_0^{57.5} \tau(5dx) = 54.2.10^{-6}\,F\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{57.5} = 0.448F$$

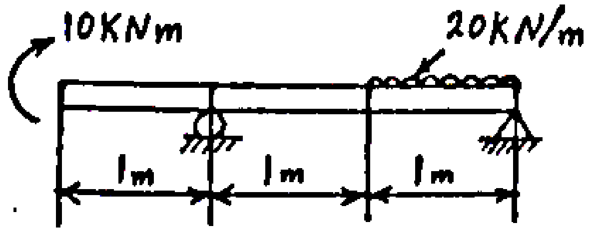
خذ العزوم حول النقطة c،

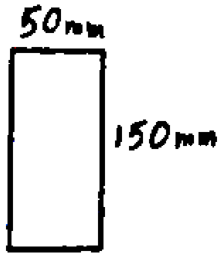
$$Fh = 55R$$

$$\therefore h = 24.7mm$$

تمرين:

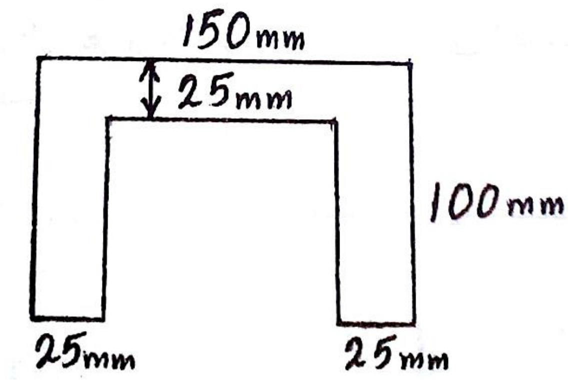
1. أوجد إجهاد القص الأقصى في العارضة أدناه.





Ans. (3N/mm^2)

2. عارضة مقطعها على شكل محرى كما موضَّح في الرسم. إذا كان أقصى قوة قص على طول العارضة 25kN، أوجد إجهاد القص الأقصى في العارضة.



Ans. (7.35N/mm^2)

3. عارضة مسنودة إسناد بسيط طولها 3m سلط عليها حمل مركز 100kN على مسافة 1m من أحد المسندين. مقطع العارضة مربع مجوف أبعاده الخارجية 150mm وسمك الجدار 37.5mm. أوجد إجهاد القص الأقصى على مسافة 37.5mm من محور التعادل.

Ans. (60N/mm^2)

4. عارضة مقطعها على شكل T شفته 100mm×10mm. ما هي النسبة المئوية لقوة القص عند أي مقطع محمولة بواسطة الوترة.

Ans. (93.5%)

5. عارضتان أبعادهما كما في الجدول مسنودتان عند طرفيهما ومسلط على كل منهما حمل في الوسط بحيث يكون إجهاد الانحناء في كليهما واحد. أوجد نسبة إجهاد القص الأقصى في الوترة.

المقطع	سمك الوترة	سمك الشفة	عرض الشفة	العمق الكلي	مسافة محور التعادل من الحافة الخارجية للشفة
I	5.0	8.75	62.5	125	62.5
T	12.5	12.5	125	100	26.2

الأبعاد بالـ (mm)

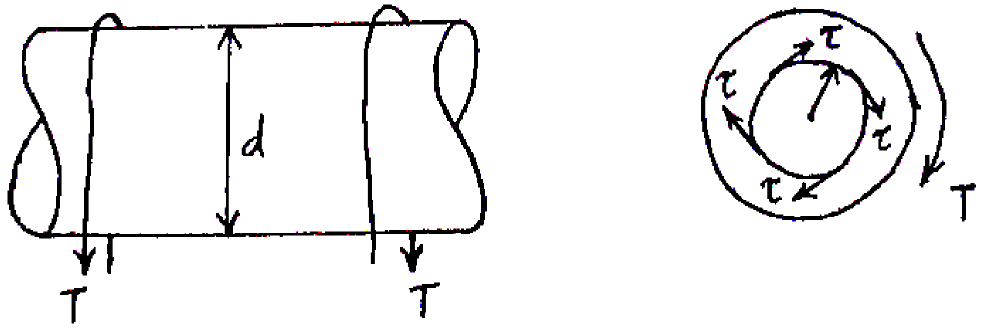
Ans. (3.38)

6. مقطع على شكل مجرى له وترة عمقها 192mm وسمكها 6mm وشفتين عرض كل منهما 84mm وسمكها 12mm. هذا المقطع استخدم كعارضة وتدية بحيث تكون الوترة في المستوى الرأسي ومُسلط عليها حمل في الطرف W. أوجد موضع W بالنسبة للوترة بحيث لا تتعرض العارضة إلي إلتواء.

Ans.(من ظهر الوترة 31mm ،30N/mm^2)

6- الإلتواء

ينشأ الإلتواء عندما يتعرَّض عمود إلي عزم إلتواء يتسبب في خلق إجهادات قص في اتجاه قائم على نصف القطر كما في الرسم.



حاول استنتاج القانون التالي:

$$\frac{T}{J}=\frac{\tau}{r}=\frac{G\theta}{L}$$

حيث أنَّ: T عزم الإلتواء، J العزم القطبي، τ إجهاد القص، r نصف القطر حيث يُراد الإجهاد، G معاير الجساءة، θ زاوية الإلتواء، L طول العمود.

مثال(1):

المطلوب تصميم عمود قطره d بحيث يحقق شرطين: الأول زاوية الإلتواء يجب ألاّ تتجاوز 1° عندما يكون $L = 1.5d$. الثاني: إجهاد القص يجب ألاّ يتجاوز $55N/mm^2$. ما هو إجهاد التشغيل الذي يحقق الشرطين معاً عند نقل قدرة 1MW بسرعة 240 لفة في الدقيقة. خذ $G=80kN/mm^2$.

الحل:

العزم المنقول نحصل عليه من الآتي:

$$P=\frac{2\pi NT}{60}$$

$$10^6=\frac{2\pi 240T}{60}$$

$$T = 38.3Nm$$

(أ) زاوية الإلتواء:

$$\theta = \frac{1 \times \pi}{180} = 0.0175rad$$

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = 0.0982d^4 \left(mm^4\right)$$

$$\frac{T}{J} = \frac{G\theta}{L}$$

$$\frac{38.8.10^6}{0.0982d^4} = \frac{80.10^3 \times 0.0175}{15d}$$

$$\therefore d = 163mm$$

(ب) إجهاد القص الأقصى:

$$\frac{\tau}{r} = \frac{G\theta}{L}$$

$$\frac{55}{0.5d} = \frac{38.8.10^6}{0.0982d^4}$$

$$\therefore d = 154mm$$

إذن قطر العمود المناسب 163mm.

مثال (2):

عمود مجوف طوله 3m مطلوب منه نقل قدرة 25kNm. زاوية الإلتواء يجب ألاّ تتجاوز 2.5° وإجهاد القص $290N/mm^2$. أوجد القطرين الداخلي والخارجي للعمود إذا كانت $G=85N/mm^2$.

الحل:

دع القطر الداخلي d_1 والقطر الخارجي d_2،

$$L = 3m, \quad \theta = 2.5° = 0.0436rad$$

$$J=\frac{\pi}{32}\left(d_2^4-d_1^4\right)=0.0982\left(d_2^4-d_1^4\right)$$

$$\frac{\tau}{r}=\frac{G\theta}{L}$$

$$\frac{25.10^6}{0.0982\left(d_2^4-d_1^4\right)}=\frac{85.10^3\times 0.0436}{3.10^3}$$

$$d_2^4-d_1^4=2.06.10^8 \qquad (1)$$

إجهاد القص الأقصى يحدث في السطح $r=\frac{d_2}{2}$،

$$\frac{\tau}{r}=\frac{G\theta}{L}$$

$$\frac{90}{0.5d_2}=\frac{25.10^6}{0.0982\left(d_2^4-d_1^4\right)}$$

$$d_2^4-d_1^4=1.1414.10^6 d_2 \qquad (2)$$

بحل المعادلتين (1) و(2) $d_1 = 125mm$، $d_2 = 145mm$

مثال (3):

عمود دائري مصمت قطره 50mm وطوله 3mm. قدرة 50kW تم توصيلها إلي عمود في وسطه بواسطة سير يمر على بكرة. هذه القدرة تستخدم لإدارة آليتين إحداهما على الطرف اليسار للعمود وتستهلك 20kW، والأخرى على الطرف اليمين وتستهلك 30kW. أوجد إجهاد القص الأقصى في العمود وكذلك زاوية الإلتواء النسبية بين قسمي العمود. يدور العمود بسرعة 200 لفة في الدقيقة وهو مصنوع من الصلب $G=85N/mm^2$.

الحل:

على الطرف اليسار للعمود 20kN والعزم المنقول T_1 والقدرة 20kW،

$$P_o=\frac{2\pi NT_1}{60}$$

$$20.10^6=\frac{2\pi 200T_1}{60}$$

$$T_1 = 952Nm$$

وعلى الطرف اليمين، العزم المنقول T_2 والقدرة 30kW،

$$30.10^6 = \frac{2\pi 200 T_2}{60}$$

$$T_2 = 1.43kNm$$

إذن إجهاد القص الأقصى في سطح العمود على اليمين،

$$J = \frac{\pi \times 10^4}{32} = 614.10^3 mm^4$$

$$\frac{T}{J} = \frac{\tau}{r}$$

$$\frac{\tau}{25} = \frac{1.43.10^6}{614.10^3}$$

$$\tau = 58.3N / mm^2$$

زاوية الإلتواء لليسار،

$$\frac{T}{J} = \frac{G\theta}{L}$$

$$\frac{95.2.10^3}{614.10^3} = \frac{85.10^3 \theta_1}{1.5.10^3}$$

$$\theta_1 = 0.027rad$$

زاوية الإلتواء لليمين،

$$\frac{1.43.10^3}{614.10^3} = \frac{85.10^3 \theta_2}{1.5.10^3}$$

$$\theta_2 = 0.041rad$$

وما دامت θ_1 و θ_2 في نفس الاتجاه فإنَّ الزاوية المطلوبة هي $\theta = \theta_2 - \theta_1$.

تمرين:

1. أوجد أقصى قدرة يمكن نقلها بواسطة عمود صلب قطره 50mm بسرعة 240 لفة/دقيقة إذا كان إجهاد التشغيل $90N/mm^2$.

Ans. (55.3kW)

2. عمود دفع سفينة قطره 350mm. إجهاد التشغيل في حالة القص $50N/mm^2$ وزاوية الإلتواء المسموح بها 1° في طول 5.25m. إذا كانت $G=85N/mm^2$، أوجد العزم الأقصى الذي يستطيع العمود نقله.

Ans. (416kNm)

3. خذ العمود المذكور في المسألة السابقة، وهب أنَّ العمود مجوف وقطره الداخلي 175mm. ما هي نسبة الانخفاض في القدرة المنقولة إذا كان إجهاد القص وزاوية الإلتواء تظلان كما كانتا، ما هي نسبة التخفيض في وزن العمود.

Ans. (25%, 6%)

4. أوجد قطر عمود صلب يمكن استخدامه لنقل 150kW بسرعة 180 لفة/دقيقة إذا كان إجهاد القص المسموح به $85N/mm^2$. أوجد أيضاً أبعاد عمود مجوف من الصلب يكون قطره الداخلي 3/4 قطره الخارجي وبنفس الشروط. ما هي نسبة زاويتي الإلتواء لوحدة طولية واحدة للعمودين.

Ans. (0.88, 88mm, 78mm)

5. خذ عمود دائري مصمت ينقل 1.5MW بسرعة 300 لفة/دقيقة. أوجد قطر العمود بحيث:

(أ) لا يلتوى العمود أكثر من 1° في طول يساوى 20 قطره و

(ب) إجهاد القص لا يتجاوز $65N/mm^2$.

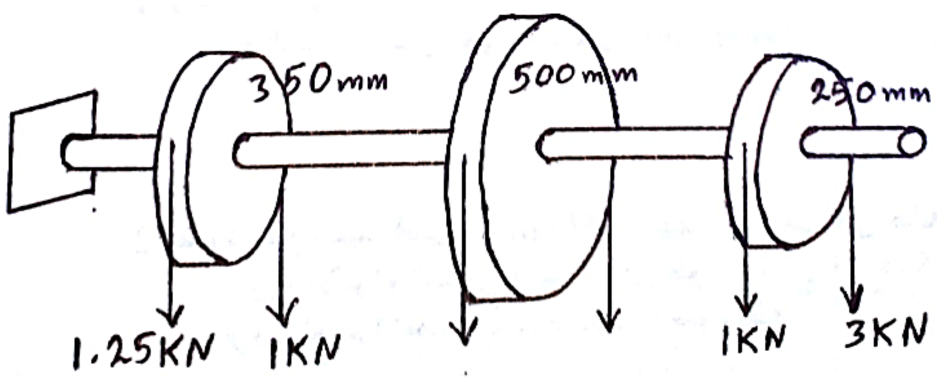
العمود مصنوع من الصلب $G=85N/mm^2$.

Ans. (188mm)

6. عمود مرَّكب من عمود نحاس طوله 0.5m وقطره 100mm يتصل بعمود صلب طوله 1m وقطره 125mm. تم تسليط عزم إلتواء 15kN على كل طرف. أوجد إجهاد القص الأقصى وزاوية الإلتواء للعمود الكامل. للنحاس $G=40kN/mm^2$، للصلب $G=85N/mm^2$.

Ans. (0.026rad, $39N/mm^2$, $76N/mm^2$)

7. الرسم أدناه يوضَّح عمود رأسي والبكرات المثبتة عليه يمكن تجاهل كتلتها. العمود يدور بسرعة منتظمة وقوى الشد في السير مبينة في الرسم. إذا كان إجهاد القص المسموح به $50N/mm^2$، أوجد قطر العمود المصمت المطلوب. تجاهل إنحناء العمود لوجود محامل قريبة من بعضها.

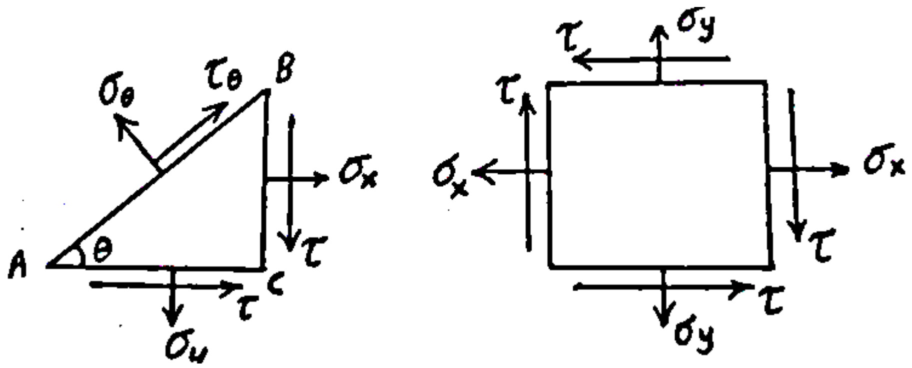


Ans. (29mm)

7- الإجهادات والانفعالات المرَّكبة

7-1 تحليل الإجهادات:

عادة لا يتعرض العضو الهندسي لنوع واحد من الإجهادات وإنما لإجهادات متعدِّدة في آن واحد. عادة يتغير الإجهاد من نقطة لآخري وبالتالي فإنَّ الانهيار – إذا حدث – لا يحدث في الجسم كله في لحظة واحدة وبل يبدأ في النقطة الأضعف أو التي تكون معرَّضة لإجهادات أكثر من غيرها. لهذا نركز الدراسة على الإجهاد عند نقطة في الجسم، ولدواعي الإبانة يتم تكبيرها فمثلاً نمثِّل عنصراً في حالة إجهادات مستوية كما في الرسم.



على المستوي AB يمكن تحليل الإجهاد إلي مركبتين، إجهاد عمودي σ_θ وإجهاد قص τ_θ. عادة ينصب الاهتمام على هذين الإجهادين لدورهما في انهيار العضو. سنأخذ الوتر $AB = 1$ وسمك العنصر 1. وبالتالي فإنَّ المساحة الواقعة على AB تساوي واحد، والمساحة AC وBC تساوي $\cos\theta$ و$\sin\theta$ على التوالي. نسبة لأنَّ العضو في حالة اتزان فإن مجموع القوى في أي اتجاه تساوي صفراً. أي أنَّ مجموع القوى في اتجاه σ_θ تساوي صفراً وكذلك مجموع القوى في اتجاه τ_θ.

وبسهولة يمكن الحصول على الآتي:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta + \tau \cos 2\theta$$

الإجهادات الرئيسة: عند أي نقطة هنالك مستويان متعامدان يعرفان بالمستويين الرئيسيين. و الذي يميز المستوي الرئيس هو أنّه خال من إجهادات القص. والإجهاد العمودي الموجود على المستوي الرئيس يسمي الإجهاد الرئيس. والإجهادان الرئيسان يمثلان القيم القصوى والدنيا للإجهادات العمودية في نقطة معينة.

حاول أن تستنتج الصيغة التالية للإجهادين الرئيسين:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\sigma_y + \sigma_x\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_y - \sigma_x\right)^2 + 4\tau^2}$$

وكذلك ميل المستويين الرئيسين:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x}$$

إجهاد القص الأقصى: يمكن حساب إجهاد القص الأقصى عند أي نقطة في المادة من الصيغة التالية (حاول أن تبرهنها):

$$\hat{\tau} = \frac{1}{2}\left(\sigma_2 - \sigma_1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau^2}$$

والمستويان اللذان يعمل عليهما إجهاد القص الأقصى بميلان 45° للمستويين الرئيسين.

مثال(1):

عند مقطع في عارضة كان إجهاد الشد الناجم من الإنحناء $50 N/mm^2$ وإجهاد القص $20 N/mm^2$. أوجد الإجهادين الرئيسين. أحسب أيضاً إجهاد القص الأقصى.

الحل:

$$\sigma_x = 50 N/mm^2,\ \sigma_y = 0,\ \tau = 20 N/mm^2$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}\left(0 + 50\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(0 - 50\right)^2 + 4 \times 20^2}$$

$$\sigma_1 = 57N/mm^2, \quad \sigma_2 = -7N/mm^2$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x} = \frac{2 \times 20}{0 - 50} = -0.8$$

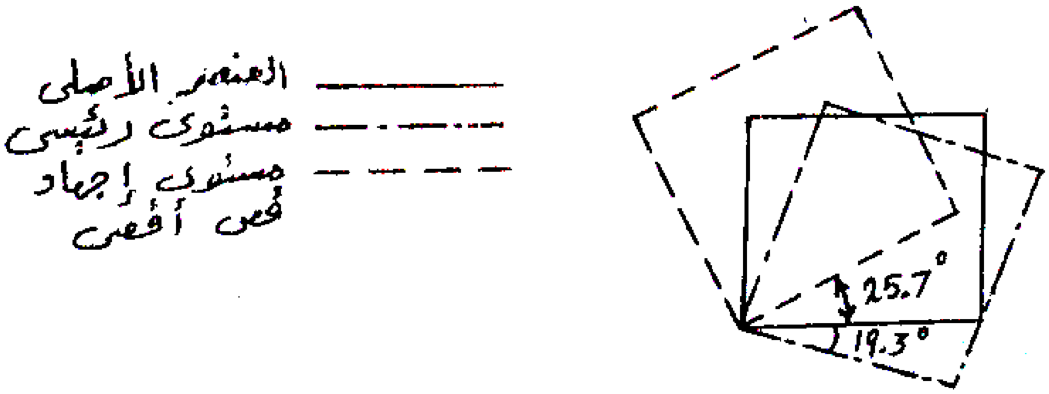
$$\tan 2\theta = -36.7^\circ$$

$$\therefore \theta_1 = -19.3^\circ, \quad \theta_2 = 70.7^\circ$$

إجهاد القص الأقصى،

$$\hat{\tau} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2}(57 + 7) = 32N/mm^2$$

المستويات الرئيسة والمستويات المعرَّضة لإجهاد قص موضَّحة في الرسم التالي:



معني هذا إذا أدرت العنصر 19.3° في اتجاه دوران عقارب الساعة تحصل على المستويات الرئيسة. أما إذا أدرتها 25.7° في عكس دوران عقارب الساعة تحصل على المستويات التي تتعرض لأقصى إجهاد قص. (ضع القيم المحسوبة بنفسك).

مثال(2):

عندما تعرَّضت أسطوانة رقيقة إلي ضغط داخلي وعزم إلتواء، كانت الإجهادات في جدار الأسطوانة:

أ- $60N/mm^2$ شد.

ب- $30N/mm^2$ شد في اتجاه قائم على (أ).

ت–إجهاد القص وإجهادات قص تكميلية $45N/mm^2$ في اتجاه (أ) و(2).

أحسب الإجهادات الرئيسة.

الحل:

$$\sigma_x = 60N/mm^2,\ \sigma_y = 30N/mm^2,\ \tau = 45N/mm^2$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\sigma_y + \sigma_x\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_y - \sigma_x\right)^2 + 4\tau^2}$$

$$= \frac{1}{2}(30+60) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(30-60)^2 + 4\times 45^2}$$

$$\sigma_1 = 92.4N/mm^2, \quad \sigma_2 = -2.4N/mm^2$$

مثال(3):

عمود مصمت قطره 125mm ينقل قدرة 600kW بسرعة 300 لفة/الدقيقة، كما يتعرَّض لعزم إنحناء $9N/mm^2$ وقوة ضغط محورية. إذا كان الإجهاد الرئيس الأقصى يجب ألاّ يتجاوز $80N/mm^2$، أوجد قوة الضغط المحورية المسموح بها. حدِّد موضع المستوي الذي يعمل عليه الإجهاد الرئيس ثم أرسم مخطَّط يوضِّح المستويات المختلفة.

الحل:

$$P = 600kW, \quad N = 300rev/\min$$

$$J = \frac{\pi}{32}\times 125^4 = 24.10^6 mm^4,\ I = 12.10^6 mm^4$$

$$A = 12.3.10^3 mm^2$$

$$P_o = \frac{2\pi NT}{60}$$

$$600.10^3 = \frac{2\pi 300T}{60}$$

$$T = 19.1\ kNm$$

إجهاد القص الأقصى الناجم من عزم الإلتواء،

$$\frac{T}{J}=\frac{\tau}{r}$$

$$\frac{19.1.10^6}{24.10^6}=\frac{\tau}{62.5}$$

$$\tau=49.8N/mm^2$$

الإجهاد العرضي $\sigma_y=0$.

الإجهاد الطولي (إجهاد ضغط)،

$$\sigma_x=\frac{M}{I}y+\frac{P}{A}$$

$$=\frac{-9.10^6\times 62.5}{12.10^6}+\frac{P.10^3}{12.3.10^3}$$

$$\sigma_x=-64.9-0.081P$$

وبالطبع يمكن حساب σ_x من الإجهاد الرئيس والصيغة التالية:

$$\sigma_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\sigma_y+\sigma_x\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_y-\sigma_x\right)^2+4\tau^2}$$

$$80=\frac{1}{2}\left(0+\sigma_x\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\left(0-\sigma_x\right)^2+4\times 49.8^2}$$

$$160=+\sigma_x+\sqrt{\sigma_x^2+9920}$$

$$\left(160-\sigma_x\right)^2=\sigma_x^2+9920$$

$$25600-320\sigma_x+\sigma_x^2=\sigma_x^2+9920$$

$$\sigma_x=+49N/mm^2$$

$$-446.9-0.081P=-49$$

$$P=25.9\ kN$$

اتجاه المستويين الرئيسين،

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \times 45}{0 + 49} = 1.837$$

$$\tan 2\theta = 30.7^\circ$$

$$\therefore \theta_1 = 30.7^\circ, \quad \theta_2 = 120.7^\circ$$

(حاول أن ترسم المخطَّط بنفسك).

تمرين:

1. عمود دائري مصمت ينقل 2240kW بسرعة 400 لفة/الدقيقة ومُسلَّط عليها أيضاً عند مقطع معين عزم إنحناء $30kN/mm^2$. أحسب أقل قطر للعمود إذا كان إجهاد القص الأقصى يجب أن يكون $60N/mm^2$.

Ans. (173mm)

2. عمود مجوف قطره الداخلي 150mm والخارجي 250mm ينقل 1200kW بقوة ضغط محورية 400kN. أوجد سرعة العمود إذا كان الإجهاد الرئيس يجب ألاّ يتجاوز $60N/mm^2$. ما قيمة قوة القص القصوى عند تلك النقطة.

Ans. ($53.63N/mm^2$, لفة/الدقيقة 80.2)

3. برهِّن أنَّه عند تسليط عزم إنحناء M وعزم إلتواء T على عمود دائري فإنَّ الإجهاد الرئيس الأقصى يساوى إجهاد الإنحناء الناجم من عزم إنحناء بسيط M_E حيث أنَّ:

$$M_E = \frac{1}{2}\left[M + \sqrt{M^2 + T^2}\right]$$

عمود مجوف يتعرَّض لعزم إنحناء 2.5kNm وعزم إلتواء 3kNm. أحسب الإجهاد الرئيس الأقصى. القطر الداخلي 75mm والخارجي 100mm.

لاحظ أنَّ M_E تسمي عزم الإنحناء المتكافئ.

Ans. (47.7N/mm^2)

4. عمود دائري مصمت ينقل 900kW بسرعة 500 لفة/الدقيقة وهو مسنود على محملين المسافة بينهما 1.8m ويحمل حدَّاف في الوسط وزنه 20kN. أوجد أصغر قطر للعمود إذا كان إجهاد القص المسموح به 75N/mm^2.

Ans. (109.6mm)

5. عند نقطة في وترة عارضة كان هنالك إجهاد قص 37.5N/mm وإجهاد شد 90N/mm^2. أوجد مركبتي الإجهاد العمودية والمماسية على مستوي يميل 30° لاتجاه إجهاد الشد.

Ans. (20.2N/mm^2, 100N/mm^2)

6. البيانات التالية تنطبق على موتور كهربائي يقوم بإدارة عمود: القدرة المنتجة 7.5kW، السرعة 950 لفة/الدقيقة، قطر بكرة الموتور 38mm، السافة بين خط عمل قوة الشد في سير البكرة القائدة ومركز المحمل 125mm، ونسبة الشد في البكرة 2.5 لنقطة على سطح العمود وفي وسط المحمل، أوجد الإجهادات الرئيسة وإجهاد القص الأقصى.

Ans. (34.7 N/mm^2, -0.72 N/mm^2, 68.6 N/mm^2)

7. عند نقطة في وترة كمرة كان إجهاد الإنحناء 80N/mm^2 (شد) وإجهاد القص في نفس النقطة 30N/mm^2، أحسب: (أ) الإجهادين الرئيسين (ب) إجهاد القص الأقصى

(ج) إجهاد الشد والذي إذا عمل لوحده يؤدي إلي نفس إجهاد القص الأقصى

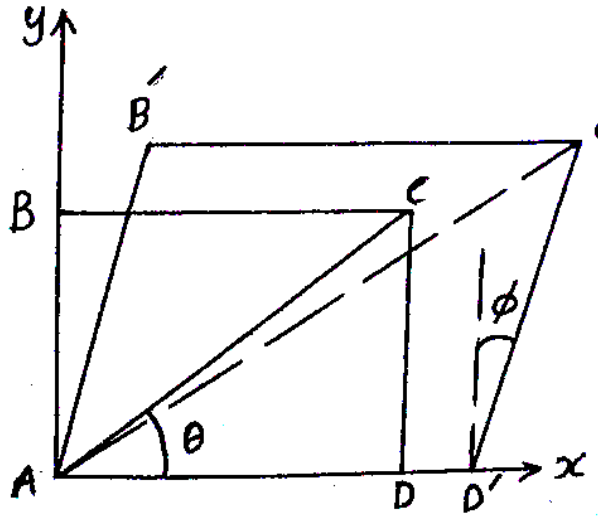
(د) إجهاد القص والذي إذا عمل لوحده يؤدي إلي نفس الإجهاد الرئيس الأقصى.

أرسم مخطَّط يوضِّح العلاقة بين المستويين الرئيسين ومستوى إجهاد القص الأقصى.

Ans. (θ_2=108.4°, θ_1=18.4°, 90N/mm^2, 100N/mm^2, 50N/mm^2, 10N/mm^2,

2.7 تحليل الانفعالات:

افترض أنَّ عنصراً ABCD تشوه ليصبح A'B'C'D'



إذا كان الانفعال الخطى في اتجاه x، $\in_x$، في اتجاه y، $\in_y$، وانفعال القص ϕ. يمكن إيجاد الانفعال في أي اتجاه يميل بزاوية θ لمحور x هكذا:

$$\in_\theta = \frac{1}{2}\left(\in_x + \in_y\right) + \frac{1}{2}\left(\in_x - \in_y\right)\cos 2\theta + \frac{\phi}{2}\sin 2\theta$$

كما يمكن ايجاد الانفعالين الرئيسين من الصيغة،

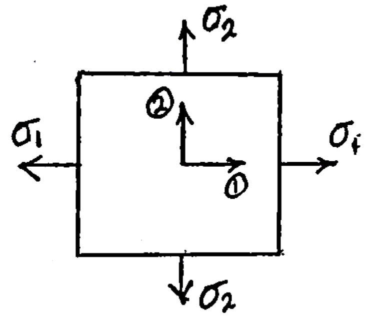
$$\in_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\in_x + \in_y\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\in_x - \in_y\right)^2 + \phi^2}$$

وهما يمثلان أقصى وأدني قيمة للانفعال في تلك النقطة، واتجاه الانفعالين هو،

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\in_x - \in_y}$$

معادلة الانفعال – الإجهاد:

في حالة الإجهادات المستوية ومن الرسم نجد أن:



$$\in_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E}$$

$$\in_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E}$$

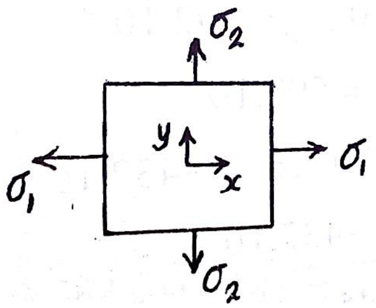
يمكن التعبير عن الإجهادات بدلالة الانفعالات هكذا،

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\in_1 + \nu \in_2), \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu \in_1 + \in_2)$$

مثال(4):

عند نقطة في لوح كانت الإجهادات كما موضَّح في الرسم. وكانت الانفعالات كما يلي $\in_x = 118.5.10^{-6}$ و $\in_y = 94.7.10^{-6}$. أوجد الإجهاد العمودي وإجهاد القص على مستوي يميل 30° للمحور x. خذ $E=207kN/mm^2$ و $\nu = 0.28$.

الحل:



$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\in_1 + \nu \in_2)$$

$$= \frac{207.10^3}{1-0.28^2}(188.5 + 0.28 \times 94.7).10^{-6}$$

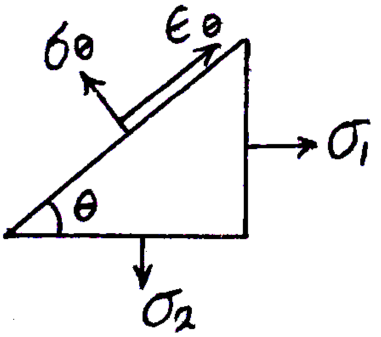
$$\sigma_1 = 20.7 N/mm^2$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu \in_1 + \in_2\right)$$

$$= \frac{207.10^3}{1-0.28^2}\left(0.28 \times 188.5 + 94.7\right).10^{-6}$$

$$\sigma_2 = -13.8 N/mm^2$$

الاجهاد على مستوي يميل 30° لمحور x،



$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + \sigma_2\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}\left(20.7 - 13.8\right) + \frac{1}{2}\left(20.7 + 13.8\right)\cos 60^\circ$$

$$\sigma_\theta = 12.0 N/mm^2$$

$$\tau_\theta = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)\sin 2\theta$$

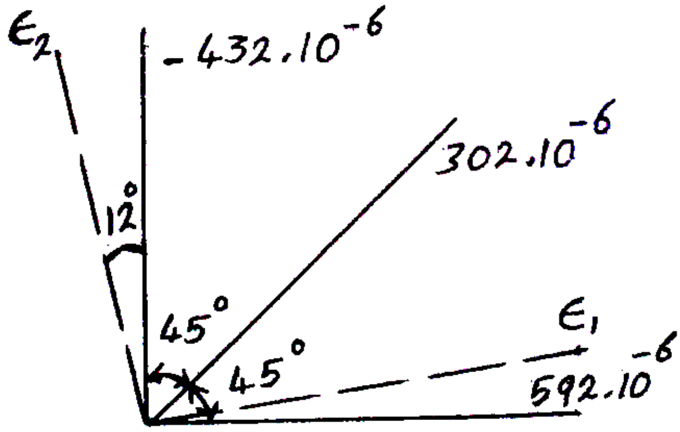
$$\tau_\theta = \frac{1}{2}\left(20.713.8\right)\sin 60^\circ = 14.9 N/mm^2$$

مثال(5):

مقياس انفعال يتكون من 3 أزرع على سطح لوح معدني في حالة إجهاد أعطي القراءات التالية: الأول بزاوية صفر 592.10^{-6}، الثاني بزاوية 45° 308.10^{-6}، والثالث بزاوية 90° -432.10^{-6}. الزوايا تم قياسها في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة بدءاً من الزراع الأول. أوجد مقدار

الانفعالين الرئيسين واتجاههما بالنسبة للزراع الأول. أوجد الإجهادين الرئيسين إذا كانت $E=203kN/mm^2$ و $\nu = 0.33$.

الحل:



$$\in_\theta = \frac{1}{2}\left(\in_x + \in_y\right) + \frac{1}{2}\left(\in_x - \in_y\right)\cos 2\theta + \frac{\phi}{2}\sin 2\theta$$

$\theta = 0,\ \in_\theta = 592.10^{-6}$

$\therefore \in_x = 592.10^{-6}$

$\theta = 90^\circ,\ \in_\theta = -432.10^{-6}$

$\therefore \in_y = -432.10^{-6}$

$\theta = 45^\circ,\ \in_\theta = 308.10^{-6}$

$$308.10^{-6} = \frac{10^{-6}}{2}(592-432) + \frac{10^{-6}}{2}(592+432)\cos 90^\circ + \frac{\phi}{2}\sin 90^\circ$$

$$308.10^{-6} = 80.10^{-6} + 0.5\phi$$

$$\therefore \phi = 456.10^{-6}$$

$$\in_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\in_x + \in_y\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\in_x - \in_y\right)^2 + \phi^2}$$

$$= \frac{10^{-6}}{2}(592-432) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(592+432)^2 + 456^2}$$

$$\in_{1,2} = 80.10^{-6} \pm 560.5.10^{-6}$$

$$\in_1 = 460.10^{-6}, \quad \in_2 = -480.10^{-6}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\in_x - \in_y} = \frac{456}{592+432} = 0.445$$

$$2\theta = 24^\circ$$

$$\therefore \theta_1 = 12^\circ, \quad \theta_2 = 102^\circ$$

اتجاه الانفعالين موضَّحان في الرسم السابق.

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\in_1 + \nu \in_2) = \frac{203.10^3}{1-0.33^2}(460 - 0.33 \times 480).10^{-6}$$

$$\sigma_1 = 109.7\, N/mm^2$$

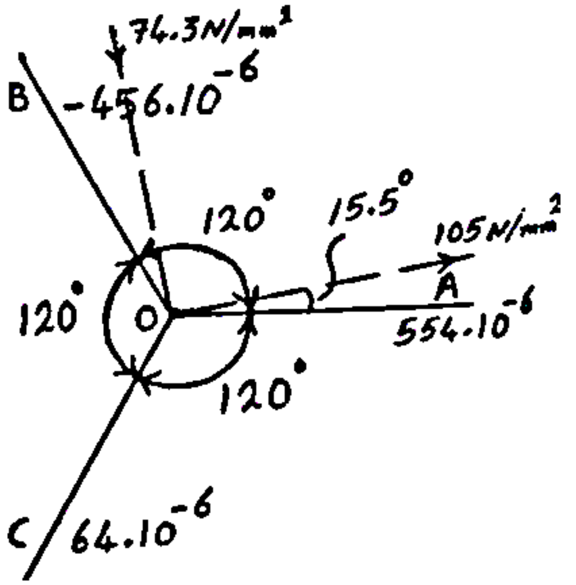
$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu \in_1 + \in_2) = \frac{203.10^3}{1-0.33^2}(0.33 \times 460 - 480).10^{-6}$$

$$\sigma_2 = -6.1\, N/mm^2$$

مثال(6):

مقياس له 3 أزرع تميل 120° على بعض. وكانت قراءة كل زراع كما موضَّح في الرسم. أوجد ميل المستويين الرئيسين عند O بالنسبة للزراع OA، ومقدار الإجهادين الرئيسين. خذ $E=200kN/mm^2$ و $\nu = 0.3$.

الحل:



$$\in_\theta = \frac{1}{2}\left(\in_x + \in_y\right) + \frac{1}{2}\left(\in_x - \in_y\right)\cos 2\theta + \frac{\phi}{2}\sin 2\theta$$

$\theta = 0, \ \in_\theta = 554.10^{-6}$

$$\therefore \in_x = 554.10^{-6} \qquad (1)$$

$\theta = 120°, \ \in_\theta = -456.10^{-6}$

$$-456.10^{-6} = \frac{1}{2}\left(\in_x + \in_y\right) + \frac{1}{2}\left(\in_x - \in_y\right)\cos 120° + \frac{\phi}{2}\sin 120°$$

$$-456.10^{-6} = 0.25 \in_x + 0.75 \in_y - 0.433\phi \qquad (2)$$

$\theta = 2400°, \ \in_\theta = 64.10^{-6}$

$$64.10^{-6} = \frac{1}{2}\left(\in_x + \in_y\right) + \frac{1}{2}\left(\in_x - \in_y\right)\cos 480° + \frac{\phi}{2}\sin 480°$$

$$64.10^{-6} = 0.25 \in_x + 0.75 \in_y + 0.433\phi \qquad (3)$$

من المعادلتين (2) و(3)،

$$-392.10^{-6} = 0.5 \in_x + 1.5 \in_y$$

عوِّض في (1)،

$$-392.10^{-6} = 0.5 \times 554 + 1.5 \in_y$$

$$\in_y = -446.10^{-6}$$

عوِّض في (2)،

$$-456.10^{-6} = 0.25 \times 554.10^{-6} + 0.75\left(-446.10^{-6}\right) - 0.433\phi$$

$$\therefore \phi = 600.10^{-6}$$

$$\in_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\in_x + \in_y\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\in_x - \in_y\right)^2 + \phi^2}$$

$$= \frac{10^{-6}}{2}\left(554 - 446\right) \pm \frac{10^{-6}}{2}\sqrt{\left(554 + 446\right)^2 + 600^2}$$

$$\in_{1,2} = 54.10^{-6} \pm 583.3.10^{-6}$$

$$\in_1 = 637.10^{-6}, \quad \in_2 = -529.10^{-6}$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\in_1 + \nu \in_2\right) = \frac{200.10^3}{1-0.3^2}\left(637 + 0.3 \times 529\right).10^{-6}$$

$$\sigma_1 = 105 N/mm^2$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu \in_1 + \in_2\right) = \frac{200.10^3}{1-0.3^2}\left(0.3 \times 637 - 529\right).10^{-6}$$

$$\sigma_2 = -74.3 N/mm^2$$

اتجاه المستويين الرئيسين هو نفس اتجاه الانفعالين الرئيسين. (أنظر الرسم).

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\in_x - \in_y} = \frac{600}{554 + 446} = 0.6$$

$$2\theta = 31^\circ$$

$$\therefore \theta_1 = 15.5^\circ, \quad \theta_2 = 105.5^\circ$$

تمرين:

1. ثلاثة أذرع لمقياس انفعال، كانت القراءات كما يلي:

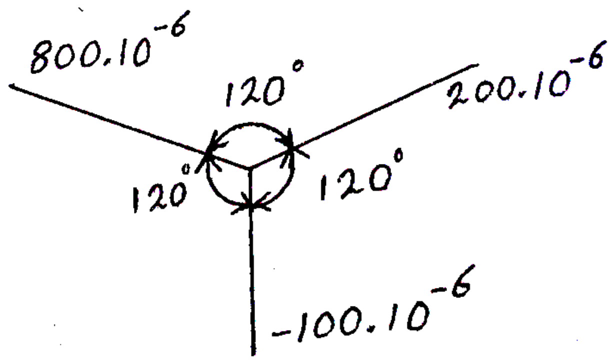
$\in_{90}=200.10^{-6}, \in_{45}=200.10^{-6}, \in_{0}=1500.10^{-6}$ أحسب الانفعالين الرئيسين.

Ans. $(-321.10^{-6},\ 161.10^{-6})$

2. أحسب الإجهادين الرئيسين في المسألة السابقة. خذ $E=80kN/mm^2$ و $\nu=0.3$.

Ans. $(15.1N/mm^2, 133.5N/mm^2)$

3. الانفعالات عند نقطة في مادة تم قياسها بواسطة مقياس انفعال له ثلاثة أذرع تميل 120° على بعضها البعض كما في الرسم. أوجد مقدار واتجاه الانفعالين الرئيسين عند تلك النقطة.



Ans.

$(8.29.10^{-6}$، -229.10^{-6} تميل 69.6° و 159.6° على التوالي في اتجاه دوران عقارب الساعة من الانفعال -100.10^{-6})

4. في تجربة لمعرفة الإجهادات عند نقطة في مادة تم تثبيت مقياس انفعال له ثلاثة أذرع. وكانت قراءة كل زراع كما يلي: $\in_{0}=1000.10^{-6}$ و $\in_{45}=150.10^{-6}$ و $\in_{90}=-200.10^{-6}$

. أوجد الانفعالين الرئيسين والإجهادين الرئيسين. خذ $E=200kN/mm^2$ و $\nu = 0.33$.

أرسم مخطَّط يوضِّح اتجاه الانفعالين بالنسبة للأذرع الثلاث لمقياس الانفعال.

Ans. ($225N/mm^2$, $217.6N/mm^2$, -250.10^{-6}, 1050.10^{-6})

5. عمود دائري مصمت قطره 50mm مُسلَّط عليه حمل محوري P وعزم إلتواء T. على سطحه تم تثبيت مقياس انفعال وكانت قراءاته كما يلي: $\in_0 = 750.10^{-6}$ و $\in_{60} = -414.10^{-6}$ و $\in_{120} = 452.10^{-6}$. الذراع الأول $\in_0$ في اتجاه محور العمود. أوجد قيمة كل من P و T. خذ $E=200kN/mm^2$ و $\nu = 0.3$.

Ans. ($1887N/mm^2$, 295kN)

3.7 دائرة مور للإجهادات:

يمكن متابعة رسم دائرة مور من المثال التالي:

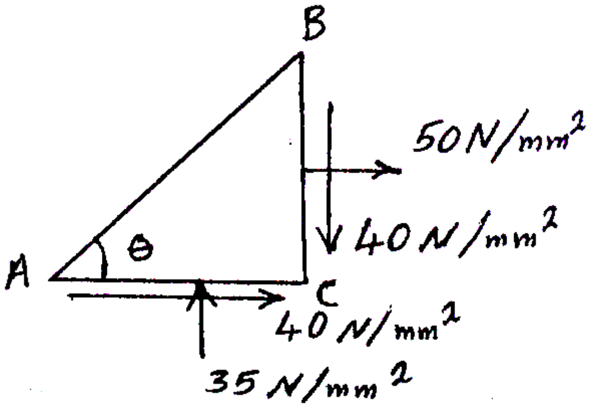
مثال (8):

عند نقطة من مادة مرنة كانت الإجهادات على مستويين متعامدين كما يلي:

إجهاد شد $50N/mm^2$ وإجهاد قص $40N/mm^2$ على أحد المستويين، وعلى المستوى الآخر إجهاد ضغط $35N/mm^2$ وإجهاد قص تكميلي $40N/mm^2$. أوجد:

(أ) الإجهادين الرئيسين وموضع المستويين الرئيسين.

(ب) موضع المستويين الخاليين من الاجهادات العمودية.



الحل:

يبدأ الرسم من النقطة P دائماً ومن مكان مناسب في الورقة وبمقياس رسم مناسب كذلك بحيث لا تتخطي الدائرة المكان المخصَّص لها.

في هذه الحالة خذ مقياس رسم $1cm=10N/mm^2$.خذ أولاً المستوي BC. أرسم $PN=50N/mm^2$ (إجهاد الشد إلي اليمين من P وإجهاد الضغط لليسار). أرسم $NR'=40N/mm^2$.خذ المستوي AC أرسم $PN=-35N/mm^2$ أرسم $N'R'=40N/mm^2$. (وهو إجهاد يحاول إدارة العنصر في عكس دوران عقارب الساعة وبالتالي فهو سالب ويرسم إلي أسفل).

صِل 'RR أرسم نقطة تقاطع 'RR و 'NN O. أرسم الدائرة. لاحظ OR يمثل المستوى BC و 'OR يمثل AC. لاحظ أنَّ الزاوية بين BC وAC قائمة بينما الزاوية بين OR و'OR تساوي °180. ومن ذلك نستنتج أنَّ كل زاوية حقيقية تتضاعف في دائرة مور. إذن كل أنصاف الأقطار في دائرة مور تمثل مستويات.

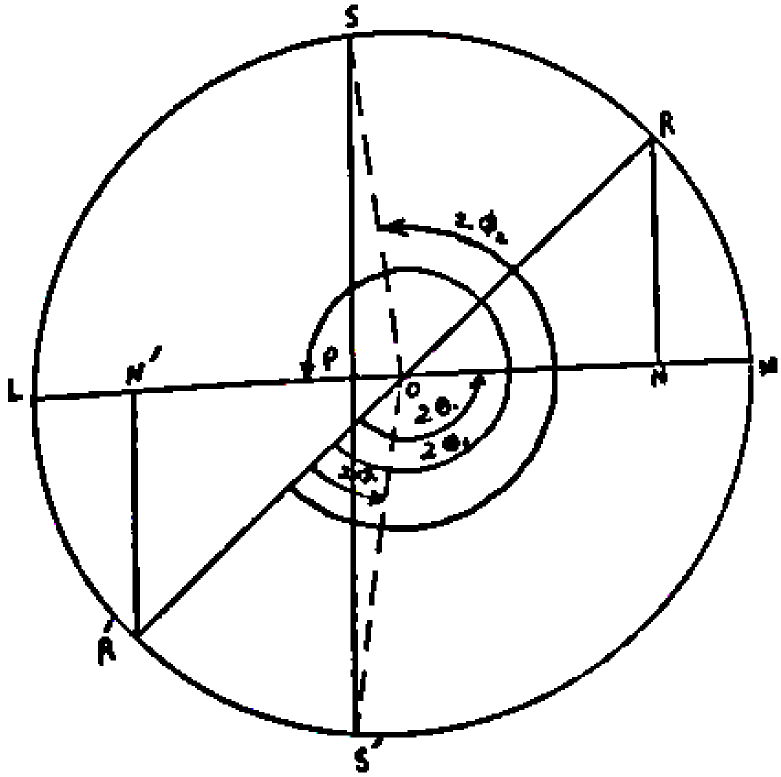
(أ) لإيجاد الإجهادين نبحث عن المستوى الخالي من إجهاد القص. واضح أنَّ المستويين OM و OL والإجهادين الرئيسين هما PM و PL. إذن

$$\sigma_1 = PM = 65.9N/mm^2,\ \sigma_2 = PL = -50.9N/mm^2$$

$$2\theta = 136.6° \quad \therefore \theta_1 = 68.3°, \quad \theta_2 = 158.3°$$

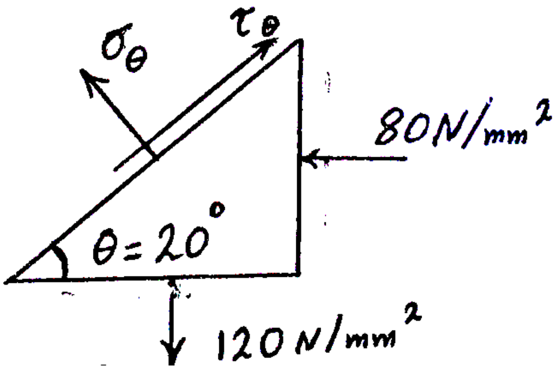
هذا يعني أنَّ المستوي المعرَّض لإجهاد ضغط $35N/mm^2$ يجب أن يدور 68.3° في اتجاه دوران عقارب الساعة لكي ينطبق المستوي الرئيس الأول.

(ب) المستوي الخالي من الإجهادات العمودية نحصل عليه عندما تنطبق P وN والمستوى المطلوب هو OS و 'OS والزاوية المطلوبة $\phi_1 = 18.5^\circ$ و $\phi_2 = 117^\circ$.



مثال(9):

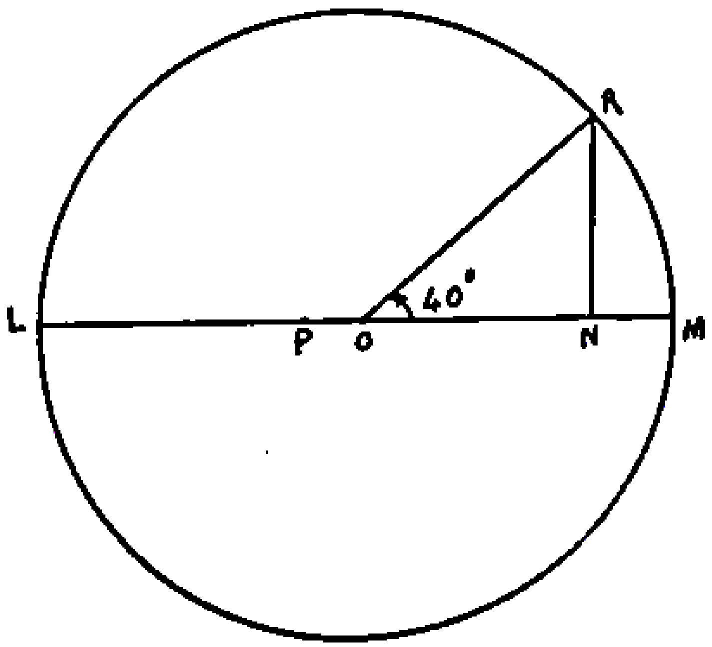
في نظام إجهادات مستوية وفي نقطة محدَّدة كان الإجهادان الرئيسيان $120N/mm^2$ (شد) و$80N/mm^2$ (ضغط). أحسب الإجهادين العمودي والمماسي على مستوى يميل 20° للمستوي الرئيس الأول.



الحل:

من النقطة P أقطع $PM=120N/mm^2$ ثم أقطع $PL=80N/mm^2$ نصِّف LM لتحديد مركز دائرة مور. أرسم الدائرة التي نصف قطرها OM. أرسم المستوى OR بحيث تكون الزاوية $MOR=40°$. أسقط عمود من RN على الخط OM.

إذن الإجهادين المطلوبين هما $\tau_\theta=64.3N/mm^2$، $\sigma_\theta=96.6N/mm^2$.



تمرين:

1. عند نقطة كانت الإجهادات على مستويين متعامدين $60N/mm^2$ شد و$30N/mm^2$ شد. إجهاد القص على هذين المستويين $15N/mm^2$. باستخدام دائرة مور، أوجد الإجهادين الرئيسين وإجهاد القص الأقصى.

Ans. ($21.2N/mm^2$, $23.8N/mm^2$, $66.2N/mm^2$)

2. أرسم دائرة مور للحالات الثلاث التالية، ومن ثم أوجد بالقياس الإجهادين الرئيسين وإجهاد القص الأقصى:

(أ) $\tau = 45N/mm^2,\ \sigma_y = 45N/mm^2,\ \sigma_x = 120N/mm^2$.

(ب) $\tau = 15N/mm^2,\ \sigma_y = -75N/mm^2,\ \sigma_x = 30N/mm^2$.

(ت) $\tau = 75N/mm^2,\ \sigma_y = -45N/mm^2,\ \sigma_x = 0$.

Ans.

(أ) ($58.6N/mm$, $23.9N/mm^2$, $141.1N/mm^2$)

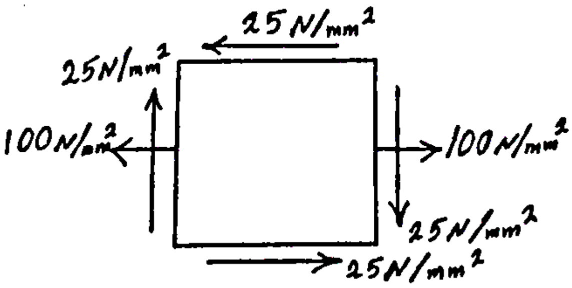
(ب) ($54.6N/mm$,- $77.1N/mm^2$, $321N/mm^2$)

(ت) ($78.3N/mm$,- $100.8N/mm^2$, $55.8N/mm^2$)

3. عنصر معرَّض للإجهادات الموضَّحة في الرسم. استخدم دائرة مور لإيجاد:

(أ) الإجهادين الرئيسين واتجاههما.

(ب) إجهاد القص الأقصى واتجاه مستواه.

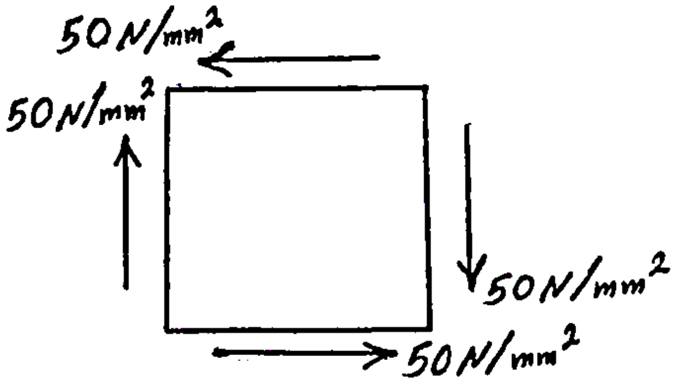


Ans.

(أ) (-$6N/mm$, $106N/mm^2$, 166.7°, 76.7°)

(ب) (121.7°, $65N/mm^2$)

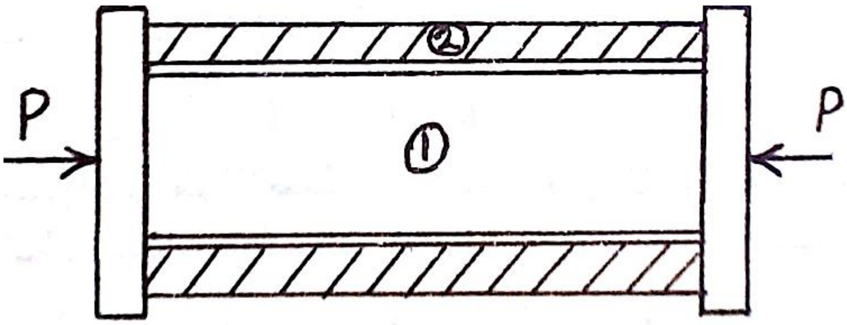
4. عنصر مستوى كما موضَّح في الرسم. أوجد الإجهادين الرئيسين في هذا العنصر واتجاه المستويين الرئيسين. استخدم دائرة مور.



Ans. (45°, 50N/mm^2)

8- القضبان المركبة

أي عنصر يتكون من قضيبين أو أنبوبين متوازيين، عادة من مادتين مختلفتين، يسمي قضيباً مركباً. أنظر الرسم.



معادلة التوافق:

$$\in_1 = \in_2$$

$$\frac{P_1}{A_1E_1} = \frac{P_2}{A_2E_2}$$

معادلة الاتزان: $P_1 + P_2 = P$

A تشير إلي مساحة المقطع ويمكن حل المعادلتين السابقتين آنياً نحصل على،

$$P_1 = \frac{PA_1E_1}{A_1E_1 + A_2E_2}, \quad P_2 = \frac{PA_2E_2}{A_1E_1 + A_2E_2}$$

مثال(1):

قضيب من الصلب قطره 18mm يمر عبر جلبة نحاس قطرها الداخلي 24mm والخارجي 39mm ومجهز بصامولة ووردة عند كل طرف. وقد تم إحكام الصامولتين حتى نشأ إجهاد $10 N/mm^2$ في الصلب. أحسب الإجهاد في النحاس والصلب.

الحل:

عند ربط الصامولتين على الأنبوب يؤدي ذلك إلي جعل قضيب الصلب في حالة شد (σ_S) وأنبوب النحاس في حالة ضغط (σ_C).

معادلة الاتزان:

قوة الشد على القضيب = قوة الضغط على الأنبوب.

$$\sigma_s\left(\frac{\pi}{4}\times 10^2\right)=\sigma_c\,\frac{\pi}{4}\left(39^2-24^2\right)$$

$$10\times 324=\sigma_c\times 945$$

$$\sigma_c=3.43N/mm^2$$

الإجهادات الحرارية: إذا كان هنالك قضيب مركب يتكون من عدة مواد تعرَّض لتغير في درجة الحرارة سيكون هنالك ميل للأجزاء المكونة للقضيب المركب لتتمدَّد بمقادير مختلفة بسبب اختلاف معامل التمدَّد لهذه المواد. إذا كانت الأجزاء محكومة للبقاء مع بعضها فسيكون التغيير في الطول الحقيقي متساوياً فيها جميعاً.

مثال(2):

أنبوب صلب قطره الخارجي 24mm والداخلي 18mm يحتوى على قضيب من النحاس قطره 15mm ويتصلان بجساءة عند طرفيهما. إذا لم تكن هنالك إجهادات طولية عند درجة حرارة 10℃، أحسب الإجهادات في القضيب والأنبوب عندما ترتفع درجة الحرارة إلي 200℃.

$$E_S=240N/mm^2,\quad E_C=100N/mm^2$$

$$\alpha_S=11.10^{-6}/°C,\quad \alpha_C=18.10^{-6}/°C$$

الحل:

الواضح من معامل التمدد أنَّ النحاس يتمدَّد أكثر من الصلب. ولكن لأنَّ الاثنان محكومان فسيتحدَّد كل منهما بنفس المقدار وذلك بالطبع سيضع النحاس في حالة ضغط الصلب في حالة شد. هب أنَّ إجهاد الضغط للنحاس σ_C وإجهاد الشد في الصلب σ_S .

معادلة الاتزان:

$$\sigma_S \frac{\pi}{4} \times 115^2 = \sigma_C \frac{\pi}{4}\left(24^2 - 18^2\right)$$

$$\sigma_C = 1.12\sigma_S \qquad (1)$$

معادلة التوافق:

الانفعال الحراري في القضيب – انفعال الضغط = الانفعال الحراري في الأنبوب + انفعال الشد

$$\alpha_C \Delta T - \frac{\sigma_C}{E_C} = \alpha_S \Delta T + \frac{\sigma_S}{E_S}$$

$$18.10^{-6} \times 180 - \frac{\sigma_C}{100.10^3} = 11.10^{-6} \times 180 + \frac{\sigma_S}{210.10^3}$$

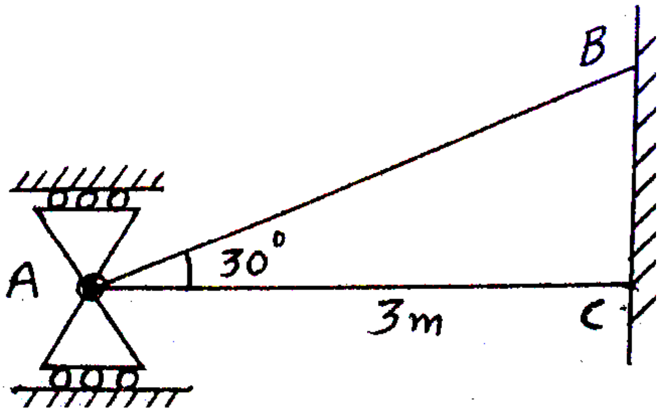
$$4.76\sigma_S + 10\sigma_C = 1330 \qquad (2)$$

من المعادلتين (1) و (2) $\sigma_S = 83.3 N/mm^2, \quad \sigma_C = 93.3 N/mm^2$

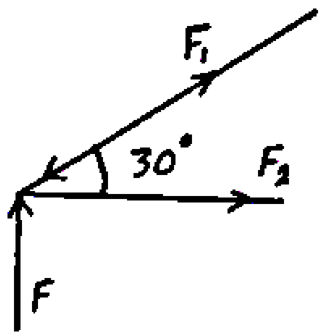
مثال(3):

الهيكل في الرسم تتصل أعضاؤه بمفصلات مسمارية ويستند عند A بحيث لا يسمح بالحركة الرأسية ولكن الحركة الأفقية ممكنة. كلا القضيبين من الصلب ومساحة مقطع منهما $1000 mm^2$.

تم تسخين العضو AB بزيادة درجة حرارته 30℃ فوق الدرجة المرجعية عندما يكون الجهاز خالٍ من الإجهاد، بينما العضو AC ظل في درجة الحرارة المرجعية. على افتراض أن العضوين يظلان مستقيمين، أوجد الإجهاد في كلٍ. خذ $E = 200 kN/mm^2$, $\alpha = 12.10^{-6}/^\circ C$.



نتيجة لارتفاع درجة حرارة AB كما موضَّح في الرسم هي القوى عند المفصلة A.



من دواعي الاتزان:

$$F_2 = F_1 \cos 30°$$

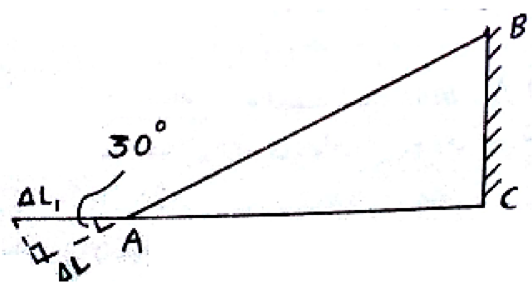
استطالة القضيب AB:

$$\Delta L_1 = \alpha \Delta T L$$

$$= 12.10^{-3} \times 30 \times \frac{3}{\cos 30°}$$

$$\Delta L_1 = 1.25 mm$$

العضو AB سيصبح في حالة ضغط والعضو AC في حالة شد.



التقلص في العضو AB:

$$\Delta L_2 = \frac{F_1 L}{AE}$$

$$\Delta L_2 = \frac{F_1 \times 3.10^3}{AE\cos 30^\circ}\, mm$$

$$\Delta L = \Delta L_1 - \Delta L_2$$

$$= 1.25\frac{F_1 \times 3.10^3}{AE\cos 30^\circ}$$

الاستطالة في AC:

$$\Delta L' = \frac{F_2 \times 3.10^2}{AE} = \frac{F_1 \times 3.10^2 \cos 30^\circ}{AE}$$

$$\Delta L = \Delta L' \cos 30^\circ$$

$$\Delta L = \frac{F_1 \times 3.10^2}{AE\cos 30^\circ} = \frac{F_1 \times 3.10^2 \cos 30^\circ}{AE}$$

$$\therefore F_1 = 43.8A, \quad F_2 = 38A$$

$$\therefore \sigma_{AB} = 43.8N/mm^2, \quad \sigma_{AC} = 38N/mm^2$$

تمرين:

1. قضيب صلب قطره 25mm وضع متمركزاً داخل أنبوب سمكه 3mm وقطره الوسيط 40mm. تم تجهيز القضيب بصامولتين ووردتين بحيث تضم الوردتان الأنبوب. تم إحكام الصامولتين لخلق إجهاد ضغط $30N/mm^2$ في الأنبوب ثم سلط حمل شد 45kN على القضيب. أوجد ناتج الإجهادات في القضيب والأنبوب:

(أ) بدون تغيير في درجة الحرارة.

(ب) عندما ترتفع درجة الحرارة 60℃.

$$E_S = 205N/mm^2, \quad E_b = 80N/mm^2$$

$$\alpha_S = 11.10^{-6}/°C, \quad \alpha_b = 18..910^{-6}/°C$$

Ans. ($31.6N/mm^2$, $116N/mm^2$, $2.5N/mm^2$, $93.7N/mm^2$)

2. سلك ألمونيوم مستقيم طوله 30m سلط عليه إجهاد شد $70N/mm^2$. أوجد استطالة السلك. ما هو التغير في درجة الحرارة الذي يمكن أن يؤدي إلي نفس الاستطالة؟.

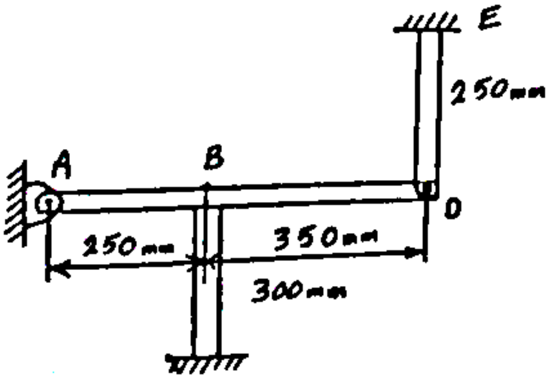
$E = 70N/mm^2$، $\alpha = 25.10^{-6}/℃$.

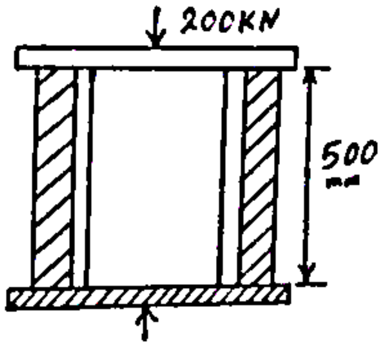
Ans. (40℃, 30mm)

3. أسطوانة من الصلب تحتوى على أسطوانة نحاس مصمتة والكل مسلط عليه حمل محوري 200kN كما في الرسم. مساحة مقطع الصلب $2000mm^2$ بينما مساحة النحاس $5000mm^2$. كل من الأسطوانتين لها نفس الطول قبل تسليط الحمل. أحسب الارتفاع في درجة الحرارة للنظام بأجمعه المطلوب بحيث يصبح الحمل مسلط على أسطوانة النحاس. لوح الغطاء جاسئ.

$$E_C = 120N/mm^2, \quad E_b = 200N/mm^2$$

$$\alpha_S = 20.10^{-6}/°C, \quad \alpha_S = 12.10^{-6}/°C$$





Ans. (41.6℃)

4. القضيب الجاسئ AD مثبت بمسمار عند A ويتصل بالقضيب BC وED كما في الرسم أدناه. الجهاز بأكمله كان خالياً من الإجهادات في البداية كما يمكن تجاهل كتل الأعضاء. تم تخفيض درجة حرارة القضيب BC 25℃ ورُفعت درجة حرارة القضيب ED 25℃. إذا افترضنا عدم حدوث انبعاج، أوجد الإجهادات العمودية في القضيبين BC وED. القضيب BC مصنوع من نحاس $E=90kN/mm^2$ و $\alpha=20.10^{-6}/℃$ والقضيب ED مصنوع من صلب $E=200kN/mm^2$ و $\alpha=12.10^{-6}/℃$. مساحة مقطع كل من BC وED $500mm^2$ و $250mm^2$ على التوالي.

Ans. ($58N/mm^2$, $48.4N/mm^2$)

5. قضيبان للسكة الحديد تم تركيبهما بحيث تكون المسافة بين أي طرفين متجاورين 3mm وذلك عندما كانت درجة الحرارة 20℃. طول كل قضيب 15m. المادة صلب $E=200kN/mm^2$ و $\alpha=12.10^{-6}/℃$:

(أ) أحسب الفجوة بين كل طرفين متجاورين عندما تكون درجة الحرارة 5℃ تحت الصفر.

(ب) عند أي درجة حرارة يكون الطرفان في حالة تلامس.

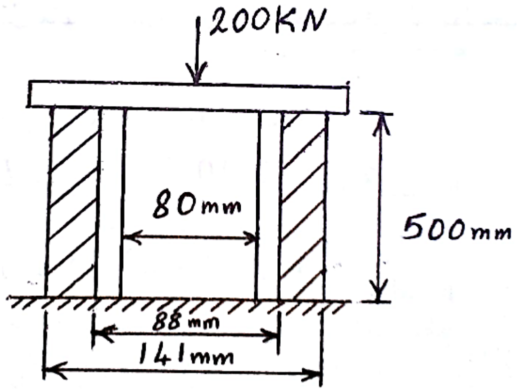
(ج) أوجد إجهاد الضغط في القضيب عندما تكون درجة الحرارة 40℃. تجاهل انبعاج القضيب.

Ans. ($18.5N/mm^2$, 31℃, 7.5mm)

6. أسطوانة المونيوم تحتوى على أسطوانة صلب كما في الرسم. الحمل 200kN تم تسليطه عبر غطاء متناهي الجساءة. إذا كانت أسطوانة الالمونيوم في الأصل أطول من أسطوانة الصلب بـ 0.25mm وذلك قبل تسليط الحمل، أوجد الإجهاد العمودي في كلٍ عندما تهبط درجة الحرارة إلي 20℃ مع وجود الحمل.

$$E_a = 70kN/mm^2, \quad E_s = 200kN/mm^2$$

$$\alpha_S = 12.10^{-6}/°C, \quad \alpha_a = 25.10^{-6}/°C$$

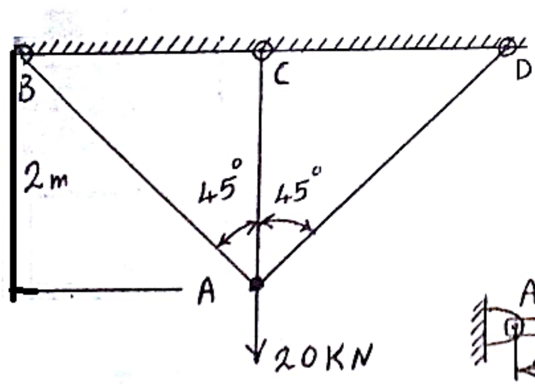


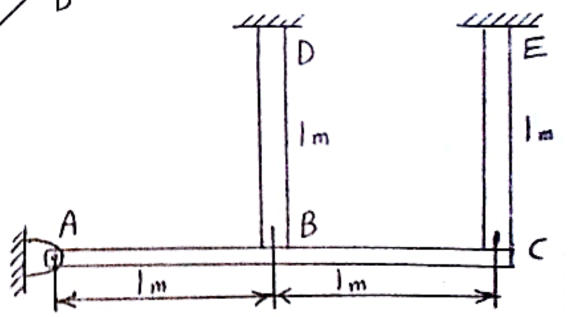
Ans. (15.5N/mm^2, 9N/mm^2)

7. القضيب AC جاسئ مطلق الجساءة وله مفصلة مسمارية عند A يتصل بكل من القضيبين DB و CE كما موضَّح في الرسم. ثقل AC 50kN ولكن يمكن تجاهل ثقل كل من DB و CE. إذا ارتفعت درجة حرارة كل من DB و CE 35°C، أوجد الإجهادات العمودية التي تنشأ في كل من القضيبين. BD مصنوع من النحاس وCE مصنوع من الصلب.

$$A_C = 1000mm^2, \alpha_C = 18.10^{-6}/°C, \quad E_C = 90N/mm^2$$

$$A_S = 500mm^2, \alpha_S = 12.10^{-6}/°C, \quad E_S = 200N/mm^2$$





Ans. (-21.7N/mm^2, 72N/mm^2)

8. القضبان الثلاثة في الرسم أدناه تسند الحمل 20kN. كل الأعضاء كانت خالية من الإجهادات وتتصل بمفصلات مسمارية. تم تسليط حمل بالتدريج وفي نفس الوقت انخفضت درجة حرارة القضبان الثلاثة 10℃. أحسب الإجهاد في كل عضو. القضيبان الخارجيان مصنوعان من النحاس ومساحة كل منهما $250mm^2$ والقضيب في الوسط مصنوع من الصلب ومساحة مقطعه $200mm^2$.

$$\alpha_C = 20.10^{-6} / °C, \quad E_C = 90 N/mm^2$$

$$\alpha_S = 12.10^{-6} / °C, \quad E_S = 200 N/mm^2$$

Ans. ($43.2N/mm^2$, $32N/mm^2$)

9– نظريات الانهيار

الانهيار لا يعني بالضرورة الكسر وإنما إذا حدثت تشوهات لدنة في العضو يمكن اعتبارها قد انهار. إذن إذا كان العضو في حالة شد أو ضغط فمن السهل معرفة متى ينهار العضو هو بالطبع عندما يتجاوز الإجهاد الناشئ إجهاد الخضوع للمادة. المشكلة إذا كان العضو معرَّض لإجهادات مركبة، كيف يمكن استنتاج إذا ما كان العضو يمكن أن ينهار أم لا تحت نظام معين من الإجهادات. لهذا السبب ظهرت نظريات كثيرة للتنبؤ بانهيار الأعضاء التي تكون معرَّضة لنظام إجهادات مركَّبة. ومن هذه النظريات:

1. نظرية الإجهاد الرئيس الأقصى:

هذه النظرية تقول أنَّ العضو الذي يتعرَّض لنظام إجهادات مركَّبة ينهار عندما تصل قيمة الإجهاد الرئيس الأقصى قيمة إجهاد الخضوع للمادة في حالة الشد البسيط. فإذا كان إجهاد الخضوع σ_y فإن الانهيار يحدث إذا تحقَّق الشرط التالي:

$$\sigma_1 = \sigma_y$$

2. نظرية إجهاد القص الأقصى:

تقول أن الانهيار يحدث عندما تصل قيمة إجهاد القص الأقصى في نظام الإجهادات المركبة إجهاد القص عند الخضوع في حالة الشد البسيط في حالة الإجهادات المركبة، إجهاد القص الأقصى،

$$\tau = \left(\sigma_1 - \sigma_2\right)$$

في نظام الشد البسيط عند الخضوع،

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma_y$$

إذن يحدث الانهيار إذا تحقَّق الشرط التالي،

$$\sigma_1 - \sigma_2 \geq \sigma_y$$

3. نظرية طاقة الانفعال:

طاقة الانفعال في نظام الإجهادات المرَّكبة،

$$U = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right]$$

طاقة الانفعال عند الخضوع في حالة الشد البسيط،

$$U = \frac{\sigma_y^2}{2E}$$

إذن الانهيار يحدث إذا تحقَّق الشرط التالي:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \sigma_y^2$$

4. نظرية طاقة انفعال القص:

طاقة انفعال القص في نظام الإجهادات المركبة،

$$U = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$

طاقة انفعال القص عند الخضوع في حالة الشد البسيط،

$$U = \frac{\sigma_y^2}{6G}$$

إذن يحدث الانهيار في نظام الإجهادات المركبة إذا تحقَّق الشرط التالي:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_y$$

5. نظرية الانفعال الرئيس الأقصى:

الانفعال الرئيس الأقصى في نظام الإجهادات المرَّكبة،

$$\in_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 + \nu\sigma_2 + \nu\sigma_3)$$

الانفعال عند الخضوع في حالة الشد البسيط،

$$U = \frac{\sigma_y}{E}$$

إذن يحدث الانهيار في نظام الإجهادات المركبة إذا تحقَّق الشرط التالي:

$$\sigma_1 + \nu\sigma_2 + \nu\sigma_3 \geq \sigma_y$$

مثال(1):

إذا كانت الإجهادات الرئيسة عند نقطة في مرنة كما يلي: 2σ شد، σشد، $\sigma/2$ ضغط. أحسب قيمة σعند الانهيار وفق كل نظرية من النظريات الخمسة. خذ إجهاد الخضوع في حالة الشد البسيط $200N/mm^2$ ونسبة بسون 0.3.

الحل:

1. الإجهاد الرئيس الأقصى:

في نظام الإجهادات المركبة $\sigma_1 = 2\sigma$

في حالة الشد البسيط $\sigma_1 = 200N/mm^2$

في حالة الانهيار

$$2\sigma = 200N/mm^2 \qquad \therefore \sigma = 100N/mm^2$$

2. إجهاد القص الأقصى:

في نظام الإجهادات المركبة $\hat{\tau} = (2\sigma + 0.5\sigma) = 2.5\sigma$

في نظام الشد البسيط $\hat{\tau} = \frac{1}{2} \times 200 = 100N/mm$

في حالة الانهيار $1.5\sigma = 100$

$$\therefore \sigma = 80N/mm^2$$

3. طاقة الانفعال:

في نظام الإجهادات المرَّكبة:

$$U=\frac{1}{2}\left[(2\sigma)^2+\sigma^2+\left(0.5\sigma^2\right)-2\times0.3\left(2\sigma\sigma-\sigma\frac{\sigma}{2}-\frac{\sigma}{2}\sigma\right)\right]$$

$$U=4.95\frac{\sigma^2}{2E}$$

في حالة الشد البسيط عند الخضوع $U=\frac{200^2}{2E}$

في حالة الانهيار $\frac{4.95\sigma^2}{2E}=\frac{200^2}{2E}$

$$\therefore\sigma=89.8N/mm^2$$

4. الانفعال الأقصى:

في نظام الإجهادات المركَّبة:

$$\in_1=\frac{1}{E}\left(2\sigma+0.3\sigma+0.3\frac{\sigma}{2}\right)$$

في حالة الشد البسيط عند الخضوع $\sigma=\frac{200}{E}$

في حالة الانهيار

$$\frac{1.85\sigma}{E}=\frac{200}{E}$$

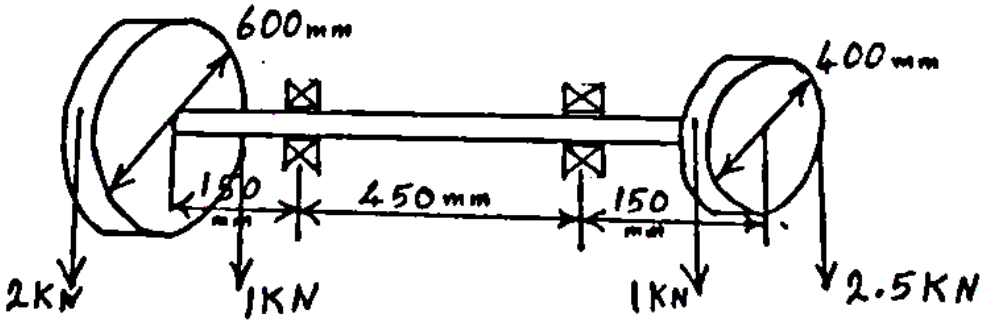
$$\therefore\sigma=108N/mm^2$$

5. طاقة انفعال القص الأقصى:

تحصل وحدك على $\sigma=91.7N/mm^2$

مثال (2):

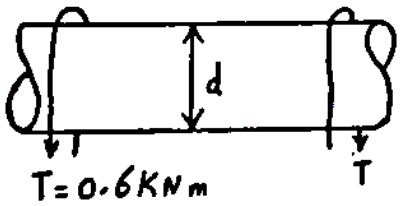
عمود دائري يتعرَّض لشد سير عند كل طرف ومسنود إسناد بسيط على المحملين الموضَّحين في الرسم. المادة لها إجهاد خضوع $250N/mm^2$. أوجد قطر العمود المناسب باستخدام نظرية الإجهاد الرئيس الأقصى وعامل سلامة 3.

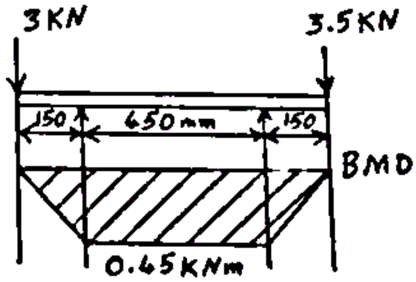


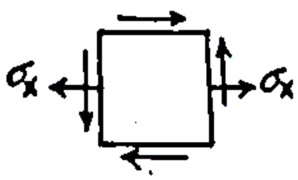
الحل:

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = 0.049 d^4 \qquad (mm^4)$$

$$J = 0.098 d^4 \qquad (mm^4)$$







$$\sigma_x = \frac{M\hat{y}}{I} = \frac{0.45.10^6 \times 0.5d}{0.049 d^4} = \frac{5.4.10^6}{d^3}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\tau = \frac{T}{J} r = \frac{0.6.10^6 \times 0.5d}{0.098 d^3} = \frac{3.06.10^6}{d^3}$$

وفق نظرية الإجهاد الرئيس الأقصى يحدث الانهيار عندما يحقَّق الشرط التالي:

$$\sigma_1 = \sigma_w = \frac{\sigma_y}{3}$$

$$\sigma_1 = (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$$

$$=(5.4+0)\frac{10^6}{d^3}+\frac{10^6}{2d^3}\sqrt{(4.5-0)^2+4\times 3.06^2}$$

$$\sigma_1=\frac{2.7.10^6}{d^3}+\frac{4.08.10^6}{d^3}=\frac{6.78.10^6}{d^3}$$

$$\therefore \frac{6.78.10^6}{d^3}=\frac{250}{3}$$

$$\therefore d=43.2mm$$

مثال(3):

نوع معين من الصلب له إجهاد خضوع $270N/mm^2$ في حالة الشد البسيط. في وضع معين لإجهادات مستوية كان الإجهادان الرئيسان $105N/mm^2$ (شد) و$30N/mm^2$ (ضغط). أحسب عامل السلامة وفق كل من:

(أ) نظرية إجهاد القص الأقصى.

(ب) نظرية طاقة انفعال القص الأقصى.

الحل:

(أ) نظرية إجهاد القص الأقصى:

يحدث الانهيار عندما يتحقَّق الشرط التالي:

$$\sigma_1-\sigma_2=\sigma_w$$

$$105+30=\sigma_w$$

$$\therefore \sigma_w=135N/mm^2$$

عامل السلامة،

$$f=\frac{\sigma_y}{\sigma_w}=\frac{270}{135}=2$$

(ب) نظرية طاقة انفعال القص:

$$2\sigma_w^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

$$= (105 - 0)^2 + (0 + 30)^2 + (-30 - 105)^2$$

$$= 30150$$

$$\sigma_w = 122.8 N / mm^2$$

عامل السلامة،

$$f = \frac{270}{122.8} = 2.2$$

تمرين:

1. عمود من الصلب قطره 50mm ويبدأ في التشوهات اللدنة عند عزم إلتواء 4.2kNm. عمود مماثل سُلط عليه عزم إلتواء 2.5kNm وعزم إنحناء M (kNm)، أوجد قيمة M باستخدام نظرية طاقة الانفعال. $\nu = 0.28$.

Ans. (27kNm)

2. عمود دائري قطره 100mm مُسلط عليه عزم إلتواء وعزم إنحناء. عزم الإنحناء ثلاثة أضعاف عزم الإلتواء. إذا كان إجهاد الخضوع في حالة الشد البسيط $360 N/mm^2$ وعامل السلامة 4، أحسب عزم الإلتواء المسموح به بواسطة النظريات الثلاث التالية:

(أ) نظرية الإجهاد الرئيس الأقصى.

(ب) نظرية طاقة انفعال القص.

(ج) نظرية إجهاد القص الأقصى.

Ans. (2.79kNm, 2.83kNm, 2.86kNm)

3. عينة من الصلب تم اختبارها (أ) بشد قضيب مصمت (ب) بتسليط حمل على طرف عارضة وتدية أدي إلي إلتواء وانحناء. وُجد أنَّه في حالة (أ) أنَّ حد التناسب

$262N/mm^2$، وفي حالة (ب) وُجد أنَّه يحدث عندما يكون إجهاد الإنحناء $124N/mm^2$ وإجهاد القص $117N/mm^2$. أدرس هذه النتائج ووضِّح إذا ما كانت تتفق مع أي من نظريات الانهيار التالية:

(i) الإجهاد الرئيس الأقصى (ii) إجهاد القص الأقصى (iii) طاقة الانفعال

أفرض قيم مناسبة لأية ثوابت غير معطاة.

Ans. (تتفق مع (ii))

4. عمود قطره 50mm مصنوع من مادة عندما تمَّ شدها أبدت انهياراً مرناً عند $340N/mm^2$ نسبة بسون 0.3. أوجد العزم الذي يؤدي إلي انهيار العمود عند تسليطه بالإضافة إلي عزم إنحناء 3.5kNm باستخدام النظريتين التاليتين:

(i) الإجهاد الرئيس الأقصى.

(ii) طاقة الانفعال.

Ans. (2.78kNm, 3.35kNm)

5. الحمل على مسمار قطره 18mm يتكون من حمل شد 10kN بالإضافة إلي قوة قص 6kN. معامل الجساءة للعمود $80kN/mm^3$ ونسبة بسون 0.283. أحسب طاقة الانفعال في المسمار.

إذا كان حد التناسب للمادة $320N/mm^2$ وعامل السلامة 4. أحسب أقل قطر للمسمار حسب: (i) نظرية إجهاد القص الأقصى.

(ii) نظرية طاقة الانفعال.

Ans. (47.9mm, 70.5mm, $724kJ/m^3$)

6. الإجهادات الرئيسة في مادة، والتي تنهار عند $300N/mm^2$، كانت كما يلي: $\sigma_1 = 2\sigma_2$ ، $\sigma_3 = 0$. نسبة بسون للمادة 0.3. أوجد قيمة σ_1 باستخدام نظرية طاقة الانفعال.

Ans. ($308N/mm^2$)

7. عمود في وضع أفقي قطره 80mm يبرز من المحمل وبالإضافة إلي العزم المنقول هنالك حمل رأسي 8kN على مسافة 300mm من المحمل. إذا كان الإجهاد المسموح به $150N/mm^2$، أوجد عزم الإلتواء المناسب الذي يمكن تسليطه على العمود باستخدام:

(أ) نظرية إجهاد القص الأقصى (ب) طاقة الانفعال $\nu = 0.28$

Ans. (8.9kNm, 7.15kNm)

10- إنحراف العارضات

معرفة الانحراف أحياناً يكون مفيداً ولكن ليس عاملاً من عوامل الانهيار (أنظر معايير الانهيار).

عرفنا آنفاً قانون الانحناء الآتي:

$$\frac{\sigma}{y}=\frac{M}{I}=\frac{E}{R} \qquad (1)$$

كما يمكن التحقق من أنَّ،

$$\frac{1}{R}=\frac{d^2v}{dx^2}\Bigg/\left[1+\frac{dv}{dx}\right]^{1.5} \qquad (2)$$

حيث v تمثل الانحراف عند أي مقطع على بعد x من نقطة الأصل عادة في أقصى يسار العارضة. وإذا كان الانحراف صغيراً يمكن كتابة المعادلة (2) كما يلي:

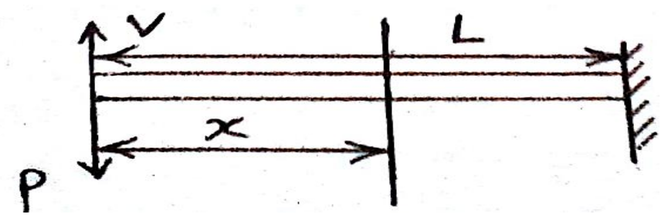
$$\frac{1}{R}=\frac{d^2v}{dx^2} \qquad (3)$$

ومن المعادلة (1) و(3) نحصل على،

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}=M$$

مثال(1):

أوجد الانحراف الميل عند طرف العارضة الوتدية الموضَّحة في الرسم.



الحل:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}=-Px$$

$$EI\frac{dv}{dx}=-\frac{Px^2}{2}+A$$

$$x = L, \quad \frac{dv}{dx} = 0, \quad \therefore A = \frac{PL^2}{2}$$

$$\therefore EI\frac{dv}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + \frac{PL^2}{2}$$

$$EIv = -\frac{Px^3}{6} + \frac{PL^2}{2}x + B$$

$$x = L, \; v = 0, \quad B = -\frac{PL^3}{3}$$

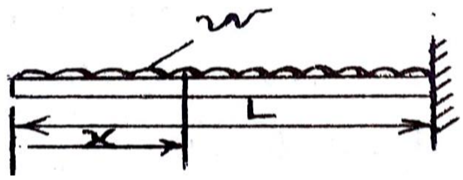
$$EIv = -\frac{Px^3}{6} + \frac{PL^2}{2}x - \frac{PL^3}{3}$$

$$x = 0, \; \frac{dv}{dx} = \frac{PL^2}{2EI}, \quad v = -\frac{PL^3}{3EI}$$

علامة السالب تعني أنَّ الانحراف إلي أسفل.

مثال(2):

أوجد الميل والانحراف عند طرف العارضة الآتية:



الحل:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{wx^2}{2}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{wx^3}{6} + A$$

$$x = L, \quad \frac{dv}{dx} = 0, \quad \therefore A = \frac{wL^3}{6}$$

$$\therefore EI\frac{dv}{dx} = -\frac{wx^3}{6} + \frac{wL^3}{6}$$

$$EIv = -\frac{wx^4}{24} + \frac{wL^3}{6}x + B$$

$$x = L,\ v = 0, \quad B = -\frac{wL^4}{8}$$

$$EIv = -\frac{wx^4}{24} + \frac{wx^3}{6}x - \frac{wL^4}{8}$$

$$x = 0,\ \frac{dv}{dx} = \frac{wL^3}{6EI}, \quad v = -\frac{wL^4}{8EI}$$

مثال(3):

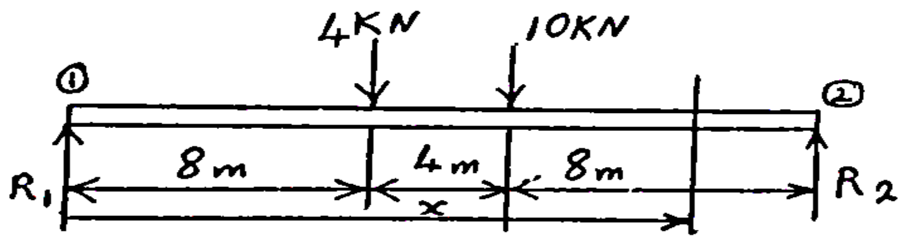
عارضة مسنودة إسناد بسيط طولها 20m مُسلط عليها ملان مركزان 10kN و4kN (الرسم).

أحسب:

(أ) الانحراف تحت كل حمل.

(ب) الانحراف الأقصى.

$E = 200kN/mm^2$، $I = 10^9 mm^4$.



الحل:

$$+\sum M_{(2)} = 0$$

$$20R_1 - 4\times12 - 10\times8 = 0$$

$$R_1 = 6.4kN$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = 6.4x - 4[x-8] - 10[x-12]$$

الأقواس المربعة يجب عدم فكها كما يُشترط إهمالها إذا ما كان بداخلها سالباً.

$$EI\frac{dv}{dx} = 3.2x^2 - 2[x-8]^2 - 5[x-12]^2 + A$$

$$EIv = 1.07x^3 - 0.67[x-8]^3 - 1.67[x-12]^3 + Ax + B$$

$$x = 0, \quad v = 0, \quad \therefore B = 0$$

$$x = 20mm, \quad v = 0, \quad \therefore A = -326.5kNm^2$$

(أ) الانحراف تحت الحمل 4kN، x = 8m،

$$EIv = -2066kNm^3$$

$$v = -\frac{2066.10^{12}}{200.10^3 \times 10^9} = -10.3mm$$

(ب) الانحراف تحت الحمل 12kN، x = 12m،

$$EIv = -2118kNm^3$$

$$v = -\frac{2118.10^{12}}{200.10^3 \times 10^9} = -10.6mm$$

عن طريق الحدث القيمة القصوى للانحراف تقع في القسم 12 > x > 8، وعندها يكون الميل صفراً. وبالتالي يتم تجاهل [x – 12]، كما يمكن استبدال الأقواس المربعة بأقواس عادية.

$$EI\frac{dv}{dx} = 3.2x^2 - 2(x-8)^2 - 35.26.5 = 0$$

$$x = 10.3mm$$

وفي هذه الحالة،

$$\hat{v} = \frac{2203.10^{12}}{200.10^3 \times 10^9} = 11mm$$

مثال(4):

أوجد الانحراف في طرف العارضة الوتدية الموضَّحة في الرسم والتي تتعرَّض لعزم إنحناء مرَّكز M_o.

الحل:

$$EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = -M_o$$

$$EI\,\frac{dv}{dx} = -M_o x + A$$

$$x = L, \quad \frac{dv}{dx} = 0, \quad \therefore A = M_o L$$

$$EIv = -\frac{M_o x^2}{2} + M_o L x + B$$

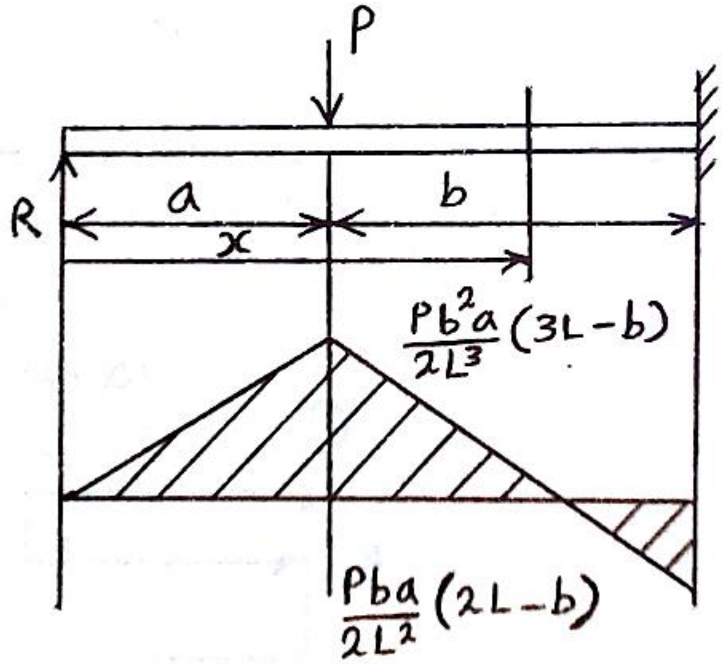
$$x = L, \quad v = 0, \quad \therefore B = \frac{M_o L^2}{2}$$

$$EI\,\frac{dv}{dx} = -\frac{M_o x^2}{2} + M_o L x - \frac{M_o L^2}{2}$$

$$x = 0, \quad v = \frac{M_o L^2}{2EI}$$

مثال(5):

عارضة وتدية مدعومة مُسلط عليها حما مركَّز كما موضَّح في الرسم أدناه، أوجد رد الفعل عند الدعامة ثم أرسم مخطَّط عزم الانحناء.



الحل:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = Rx + P[x-a]$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{Rx^2}{2} + \frac{P}{2}[x-a]^2 + A$$

$$x = L, \quad \frac{dv}{dx} = 0, \quad \therefore A = \frac{Pb^2}{2} - \frac{PL^2}{2}$$

$$\therefore EI\frac{dv}{dx} = \frac{Rx^2}{2} + \frac{P}{2}[x-a]^2 + \frac{Pb^2}{2} - \frac{PL^2}{2}$$

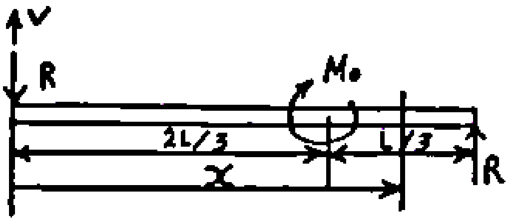
$$EIv = \frac{Rx^3}{6} + \frac{P^2}{6}[x-a]^3 + \frac{Pb^2}{2} - \frac{PL^2}{2}x + B$$

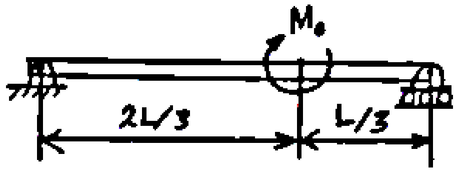
$$x = L, \quad v = 0, \quad \therefore B = 0$$

$$x = L, \quad v = 0, \quad \therefore R = \frac{Pb^2}{2L^3}(2L-b)$$

مثال(6):

عارضة مثبتة بواسطة مفصلات مسمارية عند طرفيها كما في الرسم ومُسلط عليها عزم إنحناء مركَّز M_o. أوجد الميل والانحراف.





الحل

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Rx - M_o$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{Rx}{2} - M_o\left[x - \frac{2L}{2}\right] + A$$

$$EIv = -\frac{M_o x^3}{6} + \frac{M_o}{2}\left[x - \frac{2L}{2}\right]^2 + Ax + B$$

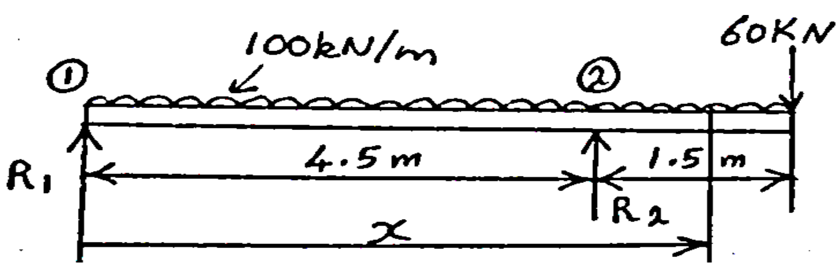
$$x = 0, \quad v = 0, \quad \therefore B = 0$$

$$x = L, \quad v = 0, \quad \therefore A = \frac{M_o L}{9}$$

$$x = \frac{2L}{3}, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{M_o L^2}{9}, \quad v = \frac{2M_o L^2}{81EI}$$

مثال(7):

عارضة طولها 6m عليها حمل موزَّع بانتظام وآخر مركَّز كما موضَّح في الرسم. أحسب الانحراف الأقصى وحدِّد موضعه. $EI = 16.7.10^{12} Nmm^2$.



الحل:

$$+\sum M_{(1)} = 0$$

$$4.5R_2 - 60\times 6 - 100\times 8\times 3 = 0$$

$$R_2 = 180kN$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = 180x - 50x^2 + 480[x-4.5]$$

$$EI\frac{dv}{dx} = 90x^2 - 16.7x^3 + 240[x-4.5]^2 + A$$

$$EIv = 30x^3 - 4.3x^4 + 80[x-4.5]^3 + Ax + B$$

$$x = 0,\quad v = 0,\quad \therefore B = 0$$

$$x = 4.5mm,\quad v = 0,\quad \therefore A = -255kNm^2$$

$$EIv = 30x^3 - 4.3x^4 + 80[x-4.5]^3 - 225x$$

الانحراف الأقصى إما يكون عند الطرف الحر أي عند x = 6m أو عند 4.5 > x > 0، وعندها يكون عند x = 6m.

$$EIv = -43kNm$$

$$\therefore v = -\frac{43.10^{12}}{16.7.10^{12}} = -2.6mm$$

إذا كان الانحراف الأقصى عند 4.5 > x > 0، فإنَّ الميل هنالك يساوى صفراً.

$$\therefore 90x^2 - 16.7x^3 - 225 = 0$$

بالمحاولة والخطأ x = 2m

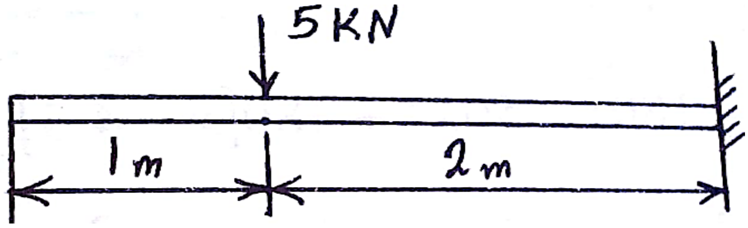
والانحراف v = 16.8mm

إذن الانحراف الأقصى $\hat{\tau} = 16.8mm$

وموضعه x = 2m.

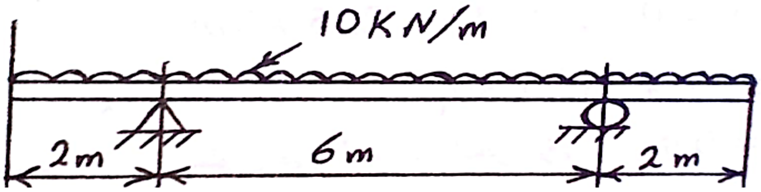
تمرين:

1. أوجد الانحراف الأقصى للعارضة الموضَّحة في الرسم مقع العارضة مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 150mm ومحور التماثل رأسي. خذ $E = 200kN/mm^2$.



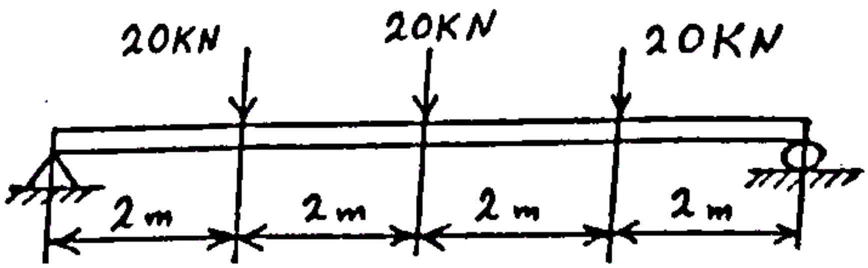
Ans. (- 12.8mm)

2. أوجد الانحراف في وسط العارضة أدناه. خذ $E = 200kN/mm^2$.



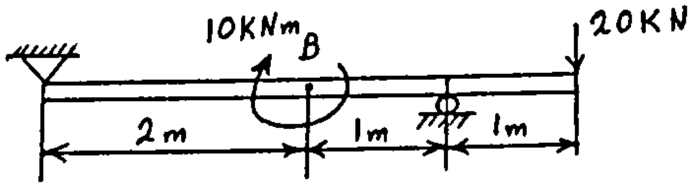
Ans. (- 2.6mm)

3. أوجد الانحراف الأقصى وإجهاد الانحناء الأقصى للعارضة الموضَّحة. مقطع العارضة 150mm×100mm، $E = 15kN/mm^2$.



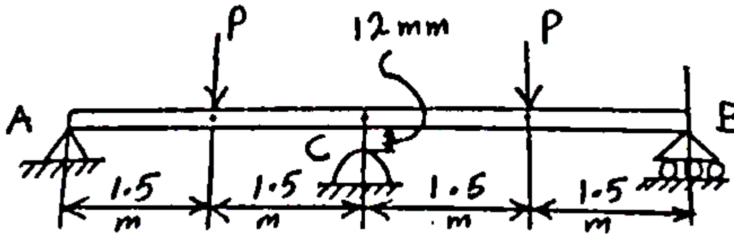
Ans. ($35.3N/mm^2$, 100mm)

4. أحسب الانحراف عند النقطة B حيث يتم تسليط العزم. $I = 20.10^6 mm^4$، $E=200kN/mm^2$.



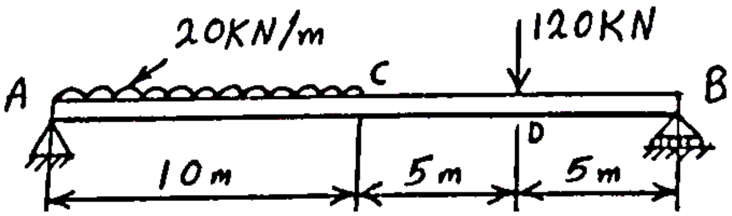
Ans. (3.3mm)

5. عارضة AB مسنودة إسناد بسيط مُسلط عليها حملان مركّزان P كما في الرسم أدناه. مسند C موضوع في الوسط على مسافة 12mm أسفل العارضة قبل تسليط الحملين. أحسب مقدار الحمل P والذي يؤدي إلي ملامسة العارضة $E=200kN/mm^2$، $I=165.10^6mm^4$.



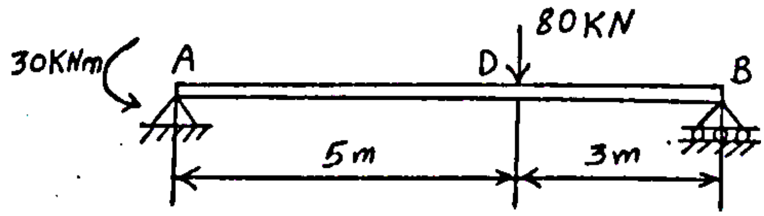
Ans. (64kN)

6. أوجد الميل عند الطرف اليمين والانحراف عند النقطة D للعارضة أدناه. $E=200kN/mm^2$، $I=250.10^6mm^4$.



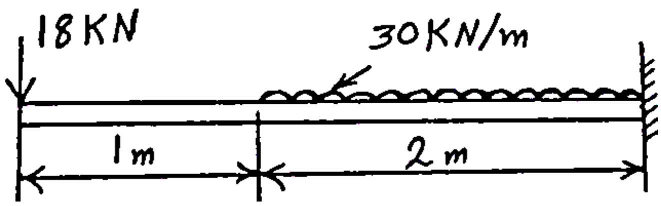
Ans. (49.6mm, 0.0111)

7. أوجد الميل عند الطرف اليسار والانحراف عند النقطة D للعارضة أدناه. $E=210kN/mm^2$، $I=305.10^6mm^4$.



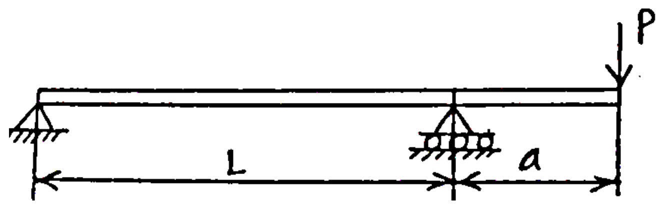
Ans. (10.1mm,   0.00304)

8. أوجد الميل والانحراف عند الطرف الحر للعارضة أدناه $E=70kN/mm^2$،
$I=200.10^6 mm^4$.



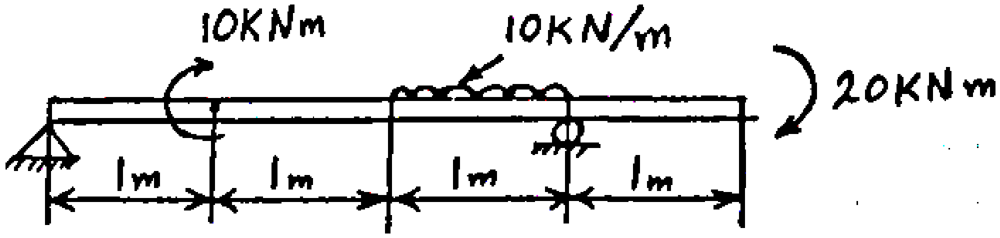
Ans. (18.7mm, 0.0086)

9. أوجد الانحراف عند الطرف C للعارضة أدناه.



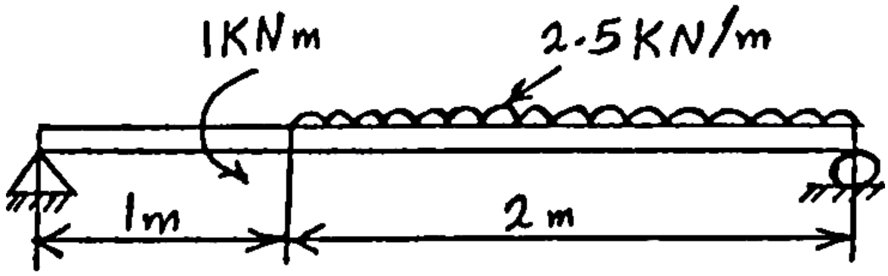
Ans. $\left(\frac{Pa^2}{3EI}(L+a)\right)$

10. أحسب الانحراف على بعد 1m من الطرف اليسار $E=12.10^{12}N/mm^2$.



Ans. (+4.5mm)

11. أوجد الانحراف على بعد 1m الطرف اليسار.



Ans. (7.23mm)

المصادر:

1. William A. Nash and C.E.N Sturgess, "Strength of Materials", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Company, New York, 1997.
2. Urry S. A. and Turner P.J., "Solving Problems in Solid Mechanics", Vol2, Longman Scientific & Technical, UK, 1986.
3. James M. Gere and Stephen P. Timoshenko, "Mechanics of Materials", Van Nostrand Rienholds, UK, 1987.
4. Ryder, "Strength of Materials".

المصطلحات:

Axis	محور
Axial load	حمل محوري
Area	مساحة
Angle	زاوية
Applied load	حمل مسلط
Bar	قضيب
Brittle material	مادة قصفة
Bending moment	عزم انحناء
Bending stress	إجهاد انحناء
Brass	نحاس
Build-in beam	عارضة مبنية
Buckling	انبعاج
Complementary	تكميلي
Complementary shear stress	اجهاد قص تكميلي
Centre	مركز
Centre of area	مركز مساحة
Channel – section	مقطع على شكل مجري
Concentrated load	حمل مركَّز
Concentrated bending moment	عزم انحناء مركَّز

Cast iron	حديد زهر
Compression	ضغط
Cantilever beam	عارضة وتدية
Compound	مركب
Compound shaft	عمود مركب
Compound bar	قضيب مركب
Compound stress	إجهاد مركب
Compound strain	انفعال مركب
Compatibility	توافق
Copper	نحاس
Coefficient	معامل
Coefficient of expansion	معامل التمدَّد
Concentric	متمركز
Deformation	تشوه
Ductile material	مادة مطيلية
Diagram	مخطَّط
Distributed	موزع
Diameter	قطر
Deflection	انحراف
Elasticity	مرونة

Elastic limit	حد المرونة
Element	عنصر
Equilibrium	توازن
Force	قوة
Failure	انهيار
First moment of area	العزم الأول للمساحة
Flange	شفة
Frame	هيكل
Failure criteria	معايير الانهيار
Gap	فجوة
Hook's law	قانون هوك
I – section	مقطع I
Isentropic material	مادة متشابهة الخواص
Length	طول
Longitudinal stress	اجهاد طولي
Material	مادة
Mechanics of materials	ميكانيكا المواد
Modulus	معاير
Modulus of elasticity	معاير المرونة
Modulus of rigidity	معاير الجساءة

Maximum stress	الاجهاد الأقصى
Mohr's law	دائرة مور
Neutral axis	محور التعادل
Normal	عمودي
Nut	صامولة
Oblique plane	مستوى مائل
Proportional limit	حد التناسب
Plasticity	اللدونة
Parallel axis theorem	نظرية المحاور المتوازية
Perpendicular axis theorem	نظرية المحاور المتعامدة
Plane	مستوى
Propped cantilever	عارضة وتدية مدعومة
Polar moment of area	العزم القطبي للمساحة
Point of contra flexure (inflexion)	نقطة الانقلاب
Pulley	بكرة
Propeller shaft	عمود دفع
Power	قدرة
Principal stress	إجهاد رئيس
Principal strain	انفعال رئيس
Principal plane	مستوي رئيس

Pin-hinge	مفصلة مسمارية
Rigid bar	عمود جائسئ
Rail	سكة حديد
Radius of curvature	نصف قطر التقويسة
Stress	إجهاد
Strain	انفعال
Steel (mild)	صلب (طري)
Shear stress	إجهاد قص
Shear force	قوة قص
Section	مقطع
Symmetry	تماثل
Second moment of area	العزم الثاني للمساحة
Shear center	مركز القص
Speed	سرعة
Solid (shaft)	مصمت (عمود)
Strain gauge	مقياس انفعال
Strain energy	طاقة انفعال
Shear strain energy	طاقة انفعال القص
Slope	ميل
Sleeve	جلبة – قميص

T – section	مقطع على شكل T
Torsion	إلتواء
Tension	شد
Twisting moment	عزم إلتواء
Torque	عزم إلتواء
Thermal stresses	إجهادات حرارية
Temperature	درجة حرارة
Theories of failure	نظريات الانهيار
Tube	أنبوب
Uniform distributed load	حمل موزع بانتظام
Web	وترة
Work	شغل
Working stress	إجهاد تشغيل
Washer	وردة
Yield	خضوع
Yield stress	إجهاد خضوع