كتاب

التصميم بمساعدة الحاسوب

تأليف:

د. أسامة محمد المرضي سليمان خيَّال

قسم الهندسة الميكانيكية

كلية الهندسة والتقنية

جامعة وادي النيل

عطبرة، السودان

الطبعة الأولي ديسمبر 1998م

الطبعة الثانية نوفمبر 2018م

بسم الله الرحمن الرحيم

الفصل الأول

أسلوب العنصر المحدَّد (F. E. M.)

(Finite Element Method)

1.1 مقدمة: (Introduction)

هو الأسلوب المباشر لحساب التفاوتات للوصول إلي الحل التقريبي للمسائل المتصلة المعقدة (الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية العادية والجزئية). وهذا يتم بتحويل المسائل المتصلة المعقدة (continuum) بدرجة حريتها اللانهائية إلي المسائل بديلة لها درجة حرية محددة خواصها قريبة من النموذج الأصلي.

يستخدم أسلوب العنصر المحدد لحل المسائل ذات الشكل الهندسي المعقد التي لا يمكن حلها بالأساليب التحليلية القياسية. ولكن عندما يكون الشكل الهندسي المراد حساب التقاوتات فيه معقداً فإنَّ المهمة تصبح أكثر تعقيداً وصعوبة. في طريقة العناصر المحدَّدة يمكن تفادي هذه المصاعب بتخيل هذه أنَّ الجسم المصمت المراد إجراء هذه الطريقة عليه يمكن تقسيمه إلي عدد من التقسيمات المحدَّدة لتسهيل حله.

1.2 الفكرة الأساسية لأسلوب العنصر المحدَّد:

أفترض أنَّه يُراد إيجاد توزيع درجة الحرارة للحالة المستقرة في لوحة. الفكرة الأساسية هي تقسيم الشكل الهندسي للوحة إلي عقد (node) وعناصر (elements).

من بعد يتم إفتراض أنَّ مجال درجة الحرارة يتفاوت بصيغة بسيطة خلال أي عنصر محدَّد (عادة يتم استخدام التفاوت الخطي أو متعدِّد الحدود الثنائي لاستكمال مجال التغير). يقود إجراء التقسيم هذا لنظام معادلات جبرية خطية يمكن حلها بسهولة على حاسوب رقمي.

1.3 فحص جبر المصفوفات: (Review of Matrix Algebra)

يتم تعريف المصفوفة كصفوف وأعمدة $m \times n$ من الأعداد، حيث:

m = عدد الصفوف.

n = عدد الأعمدة.

يُرمز لعنصر من المصفوفة كـ A_{ij}، حيث:

i = صف.

j = عمود.

A_{ij} هو العنصر أو العدد الذي يحتل الصف i والعمود j.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

تُسمي المصفوفة مصفوفة مربعة (Squire Matrix) إذا كان $m = n$. إذا كان $m = 1$ تُسمي المصفوفة مصفوفة صف، وإذا كانت $n = 1$ تُسمي المصفوفة مصفوفة عمود أو متجه.

ترميز: (Notation)

$\underline{A}$: مصفوفة (حروف كبيرة).

$\underline{a}$: متجه (حروف صغيرة).

C: قياسي (ليس تحته خط).

الضرب بواسطة مقدار قياسي: (Multiplication of a scalar)

إذا كان $\underline{C} = \alpha\underline{A}$ ، بالتالي $C_{ij} = \alpha A_{ij}$.

تحوير المصفوفة: (Transpose of a matrix)

يتم الحصول على تحوير المصفوفة بتبادل الصفوف والأعمدة.

مثال:

$$\underset{2\times 3}{\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{3\times 2}{A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

إذا كان $\underline{A} = \underline{A}^T$ ، بالتالي فإن $\underline{A}$ يقال عنها مصفوفة متماثلة (symmetric).

جمع المصفوفات: (matrix addition)

إذا كان $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$ ، بالتالي فإن $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$.

يتم تعريف جمع المصفوفة عاليه عندما يكون $\underline{B}, \underline{A}, \underline{C}$ جميعها بنفس الرتبة .i.e جميعها لها نفس عدد الصفوف والأعمدة.

$$\underset{m\times n}{C} = \underset{m\times n}{A} + \underset{m\times n}{B}$$

حاصل ضرب المتجه القياسي: (vector scalar product)

حاصل ضرب متجهين $\underline{a}$، $\underline{b}$ يكون مقداراً قياسياً α

$$\underline{a}.\underline{b} = \underline{a}^T \underline{b} = b^T a = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$$

مثال:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}^T \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 12 + 0 + 2 = \underline{\underline{14}}$$

ضرب المصفوفة: (matrix multiplication)

اجعل $\dfrac{C}{m \times n} = \dfrac{A}{m \times q} + \dfrac{B}{q \times n}$

بالتالي، $C_{ij} = \sum_{k=1}^{q} A_{ik} B_{kj}$

يتم تعريف حاصل ضرب المصفوفة عندما يكون عدد الأعمدة $\underline{A}$ مساوٍ لعدد الصفوف في $\underline{B}$.

مثال:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{AB} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

عموماً، يكون ضرب المصفوفة غير قابل للتبديل i.e.

$$\underline{AB} \neq \underline{BA}$$

وضِّح أنَّ: $\underline{(AB)}^T = \underline{B}^T\ \underline{A}^T$.

مصفوفة الوحدة: (unit or identity matrix)

المكونات δ_{ij} لمصفوفة الوحدة I يتم تعريفها كـــ

$$\delta_{ij} \begin{cases} 0 & \text{if} \quad i \neq j \\ 1 & \text{if} \quad i = j \end{cases}$$

δ_{ij} تُسمي بدلتا كرونيكر (kronecker delta).

$$\underset{3\times 3}{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\,\underline{I} = \underline{I}\,\underline{A} = \underline{A}$$

محدِّدة المصفوفة: (determinant of a matrix)

يتم ترميز محدَّدة مصفوفة $\underline{A}$ كـ det ($\underline{A}$) (يجب أن يكون $\underline{A}$ مصفوفة مربعة).

$$\underline{\det(A)} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} C_{ij}$$

حيث C_{ij} هو العامل المرافق (cofactor) لــ A_{ij}.

معكوس المصفوفة: (Inverse of a matrix)

يتم تعريف معكوس مصفوفة بحيث أنَّ حاصل ضرب مصفوفة A ومعكوسها A^{-1} ينتج مصفوفة وحدة.

$$\underline{A}\ \underline{A}^{-1} = I = \underline{A}^{-1}\ \underline{A}$$

فقط يكون هنالك معكوساً للمصفوفة المربعة. معكوسة المصفوفات الصغيرة (كمثال حتى رتبة 3×3) يمكن تحديده بالصيغة التالية،

$$\underline{A}^{-1} = \frac{\underline{C}^T}{\det(\underline{A})}$$

حيث $\underline{C}^T$ هو تحوير مصفوفة العامل المرافق $\underline{A}$.

المعادلات الجبرية الخطية: (Linear Algebraic Equation)

هي نظم لمعادلات تظهر فيها القيم الغير معلومة خطياً ولا يكون هنالك عوامل تفاضلية أو تكاملية.

مثال:

$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -2$$

$$2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1$$

$$4x_2 + x_3 = 3$$

المعادلات الثلاث عاليه يمكن كتابتها كمصفوفة كالآتي:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$$

مثال:

أوجد الحل للنظام $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$.

الحل:

أضرب مسبقاً بـ A^{-1}

$$\underline{A}^{-1}\underline{A}\,x = \underline{A}\,\underline{b}$$

$$\underline{I}\,\underline{x} = \underline{A}^{-1}\,\underline{b}$$

$$\Rightarrow \underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b}$$

الصيغ التربيعية: (Quadratic forms)

إذا كانت $\underline{A}$ مصفوفة مربعة و x متجه (بنفس عدد الصفوف كـ $\underline{A}$)، بالتالي فإنَّ المقدار القياسي الناتج

$$\alpha = \underset{1\times n}{x^T} \underset{\underset{n\times n}{1\times 1}}{A} \underset{n\times 1}{x}$$

يسمي بالصيغة التربيعية. يُقال أنَّ المصفوفة A تكون:

1/ محدَّدة ايجابياً إذا كانت $\alpha > 0$ لكل قيم $\underline{x} \neq 0$.

2/ شبه محدَّدة ايجابياً إذا كانت $\alpha \geq 0$ لكل قيم $\underline{x} \neq 0$.

إذا كانت A محدَّدة ايجابياً (positive definite)، بالتالي فإنَّ لها معكوساً، و $\det(\underline{A}) \neq 0$

تفاضل وتكامل المصفوفات: (Differentiation and Integration of Matrices)

افترض أنَّ مكونات مصفوفة $\underline{A}$ هي دوال للمتغير x. تكامل المصفوفة $\underline{A}$ هي مصفوفة بنفس الرتبة كـ A والتي يتم الحصول على مكوناتها بتكامل أي مكونة لـ $\underline{A}$ على انفراد. وبالمثل، فإنَّ مشتقة المصفوفة $\underline{A}$ هي مصفوفة بنفس الرتبة كـ $\underline{A}$ والتي يتم على مكوناتها بتكامل أي مكونة لـ $\underline{A}$.

مثال:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2x & 0 & x \\ 3 & x^2 & x^3 \\ x & x^3 & 2x \end{bmatrix}$$

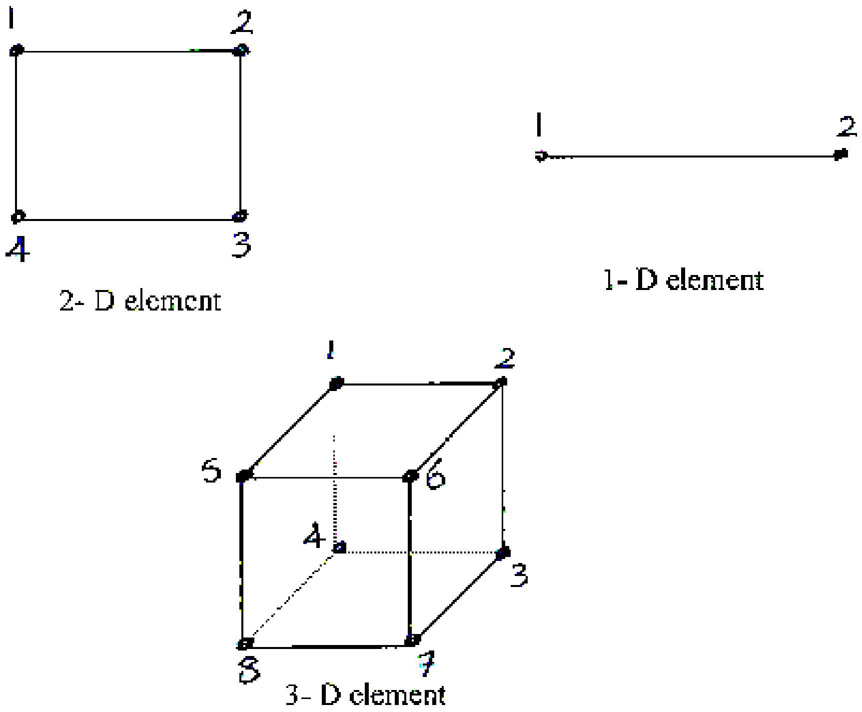
$$\frac{d\underline{A}}{dx}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2x & 2x^2\\ 1 & 3x^2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\int_{-1}^{1}\underline{A}dx=\begin{bmatrix}\int_{-1}^{1}2xdx & \int_{-1}^{1}0dx & \int_{-1}^{1}xdx\\ \int_{-1}^{1}3dx & \int_{-1}^{1}x^2dx & \int_{-1}^{1}x^3dx\\ \int_{-1}^{1}x\,dx & \int_{-1}^{1}x^3dx & \int_{-1}^{1}2xdx\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 6 & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

1.4 خطوات أسلوب العنصر المحدَّد: (procedure of finite element method)

1. التقسيم: (Discretization)

يُقصد به تقسيم نطاق الحل إلي عناصر محدَّدة. هذه العناصر قد تكون ذات بعد واحد أو بعدين أو ثلاثة اعتماداً على المسألة التي بأيدينا (شكل (1.1)). تُسمي النقاط التي تحد العناصر بالعقد (nodes). سيتم التعامل في هذه الدراسة بعنصر ذو بعد واحد.



شكل (1.1)

2. معادلة العنصر: (Element Equation)

يتم تكوين معادلات لافتراض شكل الحل لكل عنصر على حده. هذا الإجراء يتم على مرحلتين هما:

1/ اختيار دالة تقريبية لها معاملات مجهولة القيم.

2/ تحديد قيم لهذه المعاملات لإيجاد الحل لعنصر واحد.

في المرحلة (1) يتم اختيار دوال متعددة الحدود (polynomials). مثلاً لعنصر ذو بعد واحد تكون الدالة من الرتبة الأولي (معادلة خط مستقيم) أي أن:

$$u(x) = a_0 + a_1 x \qquad (1)$$

حيث $u(x)$ هي المتغير التابع، a_0 وa_1 هي معاملات مجهولة القيم، x هي المتغير المستقل. بالإشارة للشكل (1.2)، تكتب المعادلة (1) لطرفي العنصر كالآتي:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = a_0 + a_1 x_1 \\ u_2 = a_0 + a_1 x_2 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

حيث $u_1 = u(x_1)$ و $u_2 = u(x_2)$.

يمكن حل المعادلة (2) لتحديد a_0 وa_1 كما يلي:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = \dfrac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1} \\ a_1 = \dfrac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

بتعويض المعادلة (3) في المعادلة (1)،

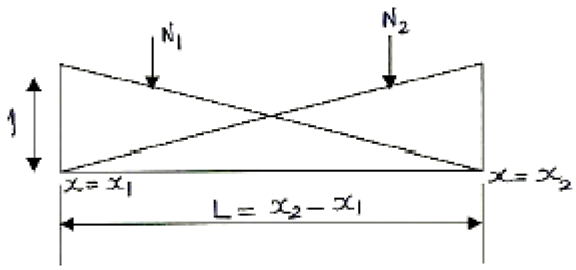
$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 \qquad (4)$$

أو في شكل مصفوفة،

$$u = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

حيث N_1 وN_2 تسميان بدوال الشكل (shape function) هما:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \\ N_2 &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$



من المعادلة (6)، عندما $x = x_1$،

$N_1 = 1$

$N_2 = 0$

وعندما $x = x_2$،

$N_1 = 0$

$N_2 = 1$

أيضاً يمكن وضع N_1 وN_2 في صورة دالة متعدد الحدود،

$$N_i = a_i + b_i x \qquad (7)$$

قيم a_i وb_i تعتمدان على رتبة العنصر وشروطه الحدية. مثلاً للعنصر الأول:

$$x_2 = L, \quad x_1 = 0$$

عندما $i = 1$: $a_1 = 1,\ b_1 = -\frac{1}{L}$

عندما $i = 2$: $a_2 = 1,\ b_2 = \frac{1}{L}$

حيث L هو طول العنصر ويُعطي بالعلاقة: $L = x_2 - x_1$

بالتعويض في المعادلة (7)،

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{L} \\ N_2 &= \frac{x}{L} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

بهذه الطريقة يمكن إيجاد دالـة الشكل لأي عنصر. الجدول (1.1) أدنـاه يبين قيم a_i و b_i للأربع عناصر الأولي عندما تكون متساوية الطول.

جدول رقم (1.1)

العنصر	a_1	a_2	b_1	b_2
1	1	0	-1/L	1/L
2	2	−1	-1/L	1/L
3	3	−2	-1/L	1/L
4	4	−3	-1/L	1/L

يلاحظ من الجدول (1.1) أعلاه أنَّ القيم العمودية لها الثوابت هي:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= n \\ a_2 &= 1 - n \\ b_1 &= -\tfrac{1}{L} \\ b_2 &= \tfrac{1}{L} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

حيث n هي رتبة العنصر.

بتعويض المعادلة (9) في المعادلة (7)،

$$N_i = a_i + b_i x \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= n - \tfrac{x}{L} \\ N_2 &= (1-n) + \tfrac{x}{L} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

بتفاضل المعادلة (10)،

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN_1}{dx} &= -\tfrac{x}{L} \\ \frac{dN_2}{dx} &= \tfrac{x}{L} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

معادلات العنصر الناتجة تتكون من مجموعة معادلات جبرية خطية يمكن وضعها على هيئة معادلة مصفوفة كالآتي:

$$[k][u] = [m] \qquad (12)$$

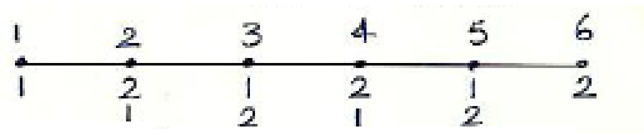
حيث [k] هي مصفوفة كزازة العنصر (element stiffness matrix)، و [u] هي مصفوفة من عمود واحد بها الكميات المراد تحديدها و [m] هي مصفوفة الكتلة للعنصر (element mass matrix) وهي أيضاً من عمود واحد.

4. التجميع: (Assembly)

هي عملية لربط معادلات العناصر لتحديد السلوك الموحد للنظام ككل، ويراعي فيه مبدأ الاستمرار، أي أنَّ نهاية عنصر هي بداية عنصر جديد. تُعرف إحداثيات عقد كل عنصر على حدة بالإحداثيات الموضعية (Local co-ordinates) و إحداثيات عقد النظام بالكامل بالإحداثيات الكونية (Global co-ordinates) الشكل (1.3) أدناه يوضح هاتين التسميتين بعد عملية التجميع يتم الحصول على معادلة المصفوفة الكونية كما يلي:

$$[k]\,[u'] = [M] \qquad (13)$$

حيث [k] هي مصفوفة الكزازة، ['u] هي مصفوفة من عمود واحد بها الكميات المراد تحديدها للنظام كله و [M] هي مصفوفة الكتلة للنظام وهي أيضاً من عمود واحد.



شكل (1.3)، التسميتان الموضعية والكونية للعناصر

4. الشروط الحدودية: (Boundary Condition)

قبل حل المعادلة (13) يجب تعديلها لتستوعب الشروط الحدودية لنطاق الحل. هذه الشروط الحدودية تمثل قيم الحل في بداية العنصر الأول ونهاية العنصر الأخير. هذه التعديلات تقود للمعادلة:

$$\left[\bar{k}\right]\left[\bar{u}'\right]=\left[\bar{M}\right] \qquad (14)$$

5. يتم حل المعادلة (14) لإيجاد قيم المجاهيل في المصفوفة ['u] بعدة طرق، منها تفكيك معادلة المصفوفة إلي معادلات آنية ثم حلها. تستخدم هذه الطرية عندما يكون عدد العناصر بسيطاً (أقل من 5). أما في حالة أن يكون عدد العناصر كبيراً، فلابد من استخدام الحاسوب في الحل. يستخدم الحاسوب لإيجاد مقلوب مصفوفة الكزازة وضربه في معادلة الكتلة. أي أنَّ:

$$\left[\bar{u}'\right]\left[\bar{k}\right]^{-1}=\left[\bar{M}\right] \qquad (14)$$

الفصل الثاني

حل مسائل تحليل الإجهادات باستخدام أسلوب العناصر المحدَّدة

(Solution of Stress Analysis Problems Using Finite Element Method)

يمكن تلخيص خطوات الحل في خمس خطوات أساسية:

2.1 تعريف شبكة العناصر المحددة: (Definition of finite element mesh)

اعتماداً على المسألة التي بأيدينا، سيكون من المناسب تمييزها كخط أو ذات بعدين أو ثلاث أبعاد.

2.2 اختيار نموذج الإزاحة: (Selection of the displacement model)

يجب أن تقابل الدالة التي يتم اختيارها لوصف نموذج الإزاحة لعنصر ما أحكاماً معينة:

أ/ عدد الاصطلاحات أو العناصر في المتسلسلة: (No of terms in the series)

عدد الاصطلاحات أو العناصر في المتسلسلة التي يتم اختيارها يجب أن أو يساوي العدد الكلي لدرجة الحرية (i.e. الإزاحة العقدية (nodal displacement)، الدوران (rotation)، الانفعال (strain)).

ب/ الانسجام: (Compatibility)

الدالة التقريبية وبعض مشتقاتها التفاضلية يجب أن تكون متصلة خلال العنصر ويجب أن يكون هنالك انسجام بين العناصر المتجاورة.

الجسم الجاسئ (rigid body) هو نموذج الإزاحة البسيط (ليس به انفعال) يليه في البساطة نموذج ثابت الانفعال، وعليه فإنَّ الدالة التي يتم اختيارها يجب أن تكون قادرة على تمثيل هذين الشرطين.

هذا يتضمن أنَّ تمثيل متسلسلة القدرة يجب أن يبدأ بثوابت (constants) واصطلاحات خطية (linear terms).

2.3 صياغة معادلة الكزازة المتقطعة:

(Formulating of discrete stiffness equation)

على أساس نموذج الإزاحة المفترض Q فإنَّ توزيع الانفعال خلال العنصر الفردي وتبعاً لذلك طاقة الوضع الكلية للتقريب المتقطع يمكن تحديدها من،

$$V = U + \Omega = \sum \left(U^e + \Omega^2 \right) \qquad \text{(a)}$$

حيث، V = طاقة الانفعال للعنصر.

U = طاقة الانفعال للعنصر.

Ω = طاقة الانفعال للأحمال المسلطة.

$$V = v(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n) \qquad \text{(b)}$$

حيث $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ هي إحداثيات الإزاحة.

بوضع الشرط dv = 0 للاتزان فإنَّ ذلك يقود لمعادلة الكزازة التالية،

$$[k][a] = [Q] \qquad \text{(c)}$$

2.4 حل معادلات الكزازة: (Solution of the stiffness equation)

يتم حل المعادلة (c) بالطريقة المعيارية للمصفوفات الجبرية. [k] تكون متماثلة وغالباً العديد من عناصرها يساوي صفر.

المصفوفة المتماثلة: (Symmetric matrix)

مصفوفة (n×n) تُسمي متماثلة إذا كانت $A^T = A$

كمثال،

$$A^{T}=\begin{bmatrix}5 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 7\end{bmatrix}=A \quad ؛ \quad A=\begin{bmatrix}5 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 7\end{bmatrix}$$

2.5 تحديد انفعال وإجهاد العنصر: (Determining the element strain and stress)

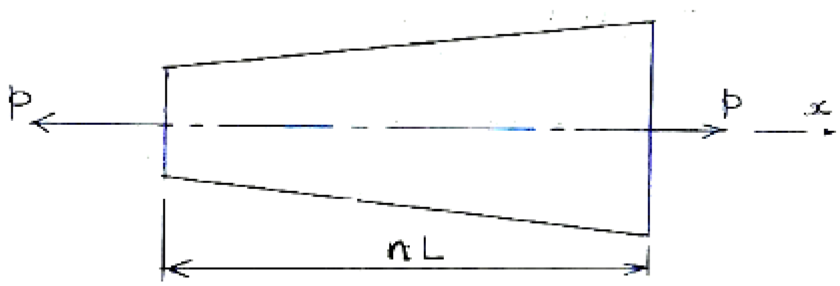
عندما يتم تحديد نموذج الإزاحة فإنَّه من السهولة بمكان حساب انفعال العنصر من نموذج الإزاحة بإستخدام علاقة الإزاحة / الانفعال. ويمكن الحصول على الإجهادات عندها بواسطة قانون هوك (Hook's law).

2.6 مثال (1):

صياغة إزاحة العنصر المحدَّد لقضيب معرَّض لحمل شد:

(Displacement finite element formation for bar extension)

اعتبر قضيباً مسلوباً أحادي محور الحمل كما موضح في الشكل (2.4)

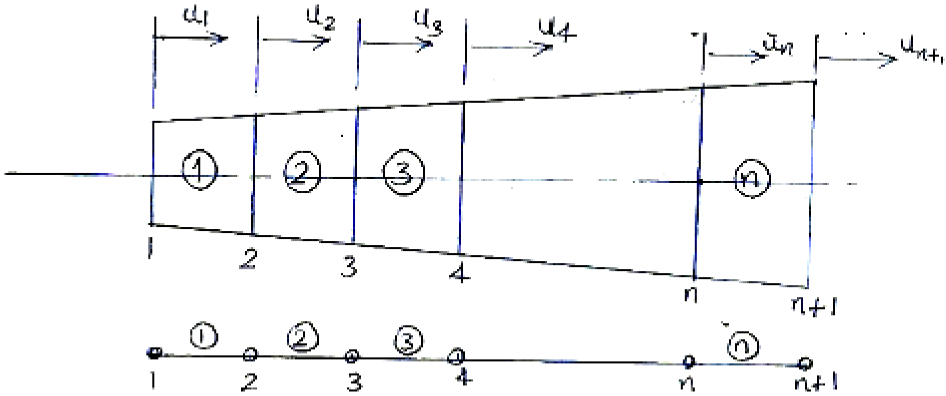


شكل (2.4)

الخطوة الأولي هي تعريف شبكة العناصر المحدَّدة:

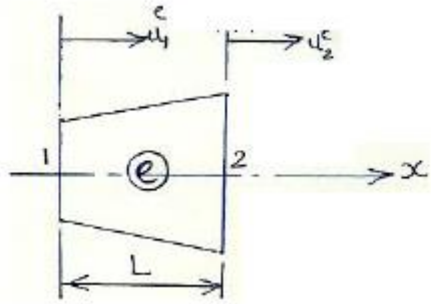
في هذه الحالة فإنَّ التقسيم هو ترتيب خطي للعناصر كما موضح في الشكل (2.4) أدناه.

نعرف من ميكانيكا المواد أن التشوه (تغير الشكل) باعتبار أن المسلوب قاسي يعتمد على الإزاحة المحورية u(x) للمقطع العرضي.



شكل (2.5)

نأخذ عنصراً نموذجياً e ونعلم مواضع العقد الخارجية (External nodes) كـ 1 و2، والإحداثي الموضعي للعنصر x كما هو واضح في الشكل (2.6) أدناه.



شكل (2.6)

وعلى المقياس الموضعي، فإن تغير الشكل (deformation) يتم تحديده بالإزاحة العقدية للعنصر (element nodal displacement) u_1^e و u_2^e.

الخطوة التالية هي اختيار نموذج إزاحة للعنصر. من دراستنا لميكانيكا المواد فإننا نعلم أنَّ الانفعال يتفاوت على طول القضيب المسلوب بعلاقة لا خطية (non-linear fashion).

وعليه فإنَّ دالة u يمكن كتابتها كالآتي:

$$u^e(x) = a_0 + a_1 x = [1 \quad x]\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = [f(x)]\{a\} \qquad (1)$$

بالرجوع للشكل (2.6) عاليه وبوضع $x = 0$ و $x = L$ يمكن كتابة المعادلة (1) كالآتي:

$$\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

ويمكن تبسيطها كالآتي،

$$\{u\}^e = [A]\{a\} \qquad (3)$$

بجعل a موضع القانون،

$$\therefore \{a\} = [A]^{-1}\{u\}^e$$

بالتعويض في المعادلة (1)،

$$u^e = [f(x)][A]^{-1}\{u\}^e \qquad (4)$$

في هذه الحالة،

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

من المعادلة (4)،

$$u^e(x) = [1 \quad x]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}$$

$$1 \times \boxed{2 \qquad 2}\, 2$$

يمكن القول أنَ،

$$u^e(x) = \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \frac{x}{L}\right]\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} \qquad (5)$$

$$;u^e(x) = [N_1(x) \quad N_2(x)] \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} \quad \text{أو} \qquad (6)$$

الخطوة الثالثة هي الحصول على الانفعال وطاقة الانفعال للعنصر:

$$\text{الانفعال، } \varepsilon = \frac{du^e}{dx} = \frac{dN}{dx}\{u\}^e = [B]\{u\} \qquad (7)$$

في هذه الحالة،

$$\text{الانفعال، } \varepsilon = \begin{bmatrix} -\frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} \qquad (8)$$

من قانون هوك، (Hook's Law)،

$$\sigma = E\ \varepsilon$$

حيث يمكن كتابة صورتها العامة الآتي،

$$\{\sigma\} = \{E\}\{\varepsilon\} \qquad (9)$$

بما أنَّ $\sigma = \frac{F}{A}$ ، $\varepsilon = \frac{\delta L}{\delta x}$

$$\text{طاقة الانفعال ، } U = \frac{1}{2} F\delta L$$

$$= \frac{1}{2}\sigma \varepsilon A\, dx = \frac{1}{2} E \varepsilon^2\ A\ dx$$

يمكن كتابة طاقة الانفعال المختزنة في العنصر كالآتي:

$$U^e = \int \tfrac{1}{2} E\, \varepsilon^2 dV$$

$$= \int \tfrac{1}{2}\{\varepsilon\}^t [E]\{\varepsilon\} dV \qquad (10)$$

من المعادلتين (7) و (10)،

$$U^e = \int \tfrac{1}{2}[B]^t \{u^e\}^t [E][B]\{u^e\} dV$$

$$U^e = \tfrac{1}{2}\{u^e\}'\left(\int [B]^t[E][B]dV\right)\{u^e\} \qquad (11)$$

بتقييم حاصل ضرب المصفوفة وإجراء التكامل نحصل على،

$$U^e = \tfrac{1}{2}\{u^e\}'[k]^e\{u\}^e \qquad (12)$$

$$[k]^e = \int [B]^t[E][B]dV \qquad (13)$$

حيث $[k]^e$ = مصفوفة كزازة العنصر (element stiffness matrix) وهي مصفوفة متماثلة بالرتبة (2×2)،

$$U = \sum_e u^e \qquad (14)$$ ، طاقة الانفعال الكلية

$$\{\tilde{u}\} = \{\{u\}^e\} = \begin{Bmatrix} \{u\}^1 \\ \{u\}^2 \\ \vdots \\ \{u\}^n \end{Bmatrix} \qquad (15)$$ ، إجعل

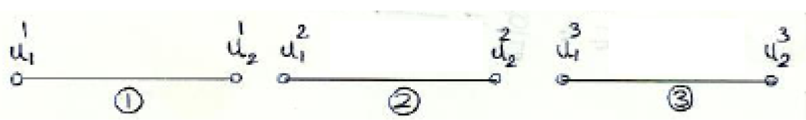
وأيضاً إجعل،

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} [k]^1 & 0 & \cdots & \\ 0 & [k]^2 & \cdots & \\ & \ddots & & \\ & & & [k]^n \end{bmatrix} \qquad (16)$$

المعادلة (14) يمكن كتابتها كالآتي من المعادلة (15) والمعادلة (12)،

$$U = \tfrac{1}{2}\{\tilde{u}\}^t[\bar{k}]\{\tilde{u}\} \qquad (17)$$

والآن عناصر $\{u\}^e$ هي ليست مطلقاً مستقلة.



$$u_2^1 = u_1^2 = u_2$$

$$u_2^2 = u_1^3 = u_3$$

$$\vdots$$

etc.

عليه يمكن كتابتها كالآتي،

$$\begin{Bmatrix} \{u\}^1 \\ \{u\}^2 \\ \vdots \\ \{u\}^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{C\}^1 \\ C^2 \\ \vdots \\ \{C\}^n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \qquad (18)$$

أو $\{\tilde{u}\} = [c]\{u\}$ (19)

بالتعويض في المعادلة (17)،

$$U = \tfrac{1}{2}\{u\}^t [C]^t [\tilde{k}][C]\{u\} \qquad (20)$$

أو $U = \tfrac{1}{2}\{u\}^t [k]\{u\}$ (21)

حيث، $k = [C]^t [\tilde{k}][C]$

والآن، طاقة الانفعال للأحمال المطبقة يمكن الحصول عليها من:

$$\Omega = -(-pu_1) - pu_{n+1} \qquad (22)$$

$$\Omega = -\{u\}^t [X] \qquad (23)$$

حيث X = القوي المطبقة خارجياً (External applied forces)

طاقة الانفعال الكلية = طاقة الانفعال + طاقة الانفعال للأحمال المطبقة

$$V = \tfrac{1}{2}\{u\}^t [k][u] - \{u\}^t [x] \qquad (24)$$

للاتزان، $\delta V = 0$، عليه،

$$\{\delta u\}^t([k]\{u\}-\{x\})=0 \qquad (25)$$

$$[k]\{u\}=\{x\} \qquad (26)$$

هذه هي معادلة الاتزان المطلوبة للجسم التقريبي المجمع.

2.7 مثال (2):

لعنصر قضيب مسلوب مسلَّط عليه حمل محوري فقط كما في الشكل (7) أدناه، وضِّح أم

مصفوفة كزازة العنصر تعطي بالعلاقة التالية:

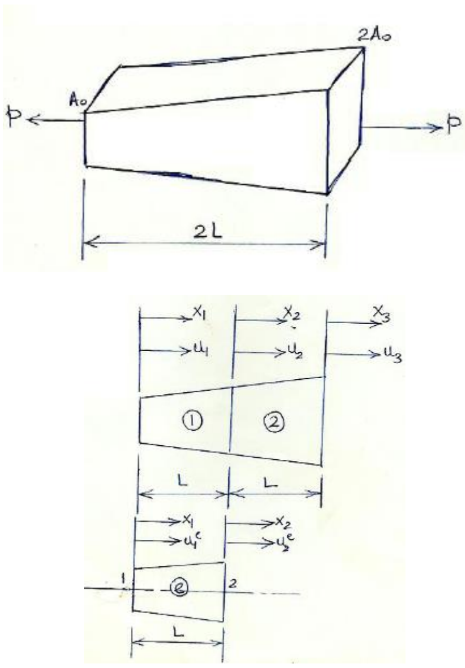
$$[k]^e=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

حيث E = معاير يونق للمرونة.

A= مساحة المقطع العرضي للعنصر.

L = طول العنصر.

أيضاً أحسب متوسط الانفعال والإجهاد للقضيب.



شكل (7)

الحل:

قسِّم القضيب إلي عنصرين،

افترض أنَّ دالة الإزاحة هي،

$$u^e(x) = a_0 + a_1 x$$

أو ،$u^e(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}$ (1)

عندما $x = 0$ و $x = L$ ،

$$\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}$$

أو $\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

عوِّض عن المعادلة (2) في المعادلة (1)،

$$u^e(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(1 - \dfrac{x}{L}\right) & \dfrac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}$$

$$u^e(x) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

الانفعال، $\varepsilon = \dfrac{du^e(x)}{dx} = \dfrac{dN}{dx}\{u\}^e$

$$= [B]\{u\}^e \qquad (4)$$

$$\therefore \varepsilon = \begin{bmatrix} -\frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}$$

من قانون هوك،

$$\{\sigma\} = \{E\}\{\varepsilon\}$$

والآن، طاقة الانفعال المختزنة في العنصر يمكن إعطاؤها كالآتي:

$$U^e = \int_0^L \tfrac{1}{2} E\, \varepsilon^2 dV$$

$$= \int \tfrac{1}{2} \{\varepsilon\}^t [E]\{\varepsilon\} dv \qquad (5)$$

$$U^e = \int \tfrac{1}{2} [B]^t \{u\}^{e^t} [E][B]\{u\}^e dV$$

$$U^e = \tfrac{1}{2} \{u^e\}^t \left(\int [B]^t [E][B] dV\right) \{u^e\} \qquad (6)$$

بإجراء التكامل نحصل على،

$$U^e = \tfrac{1}{2} \{u^e\}^t [k]^e \{u\}^e \qquad (7)$$

حيث $[k]^e$ هي مصفوفة كزازة العنصر،

$$[k]^e = \int_0^L [B]^t [E][B] dV \qquad \text{بوضع } (8)$$

$$= \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} A\, dx$$

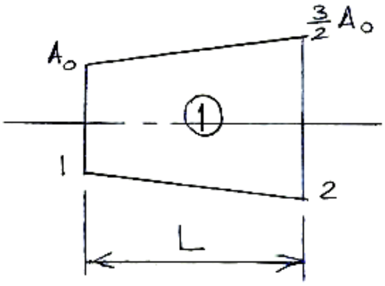
$$= \frac{E}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{-1 \quad 1\} A\, dx$$

$$= \frac{EA}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} (x)_0^L$$

$$= \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

اعتبر العنصر (1):



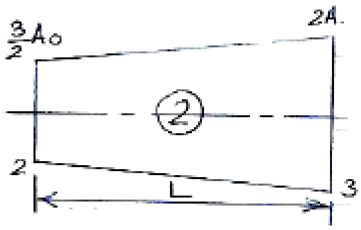
$$[k]^1 = \frac{EA_1}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

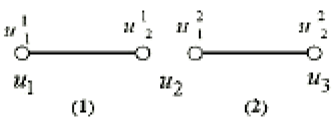
مساحة المقطع العرضي للعنصر (1) = A_1، حيث،

$$= \frac{1}{2}\left(A_0 + \frac{3}{2}A_0\right) = \frac{5}{4}A_0$$

$$\therefore [k]^1 = \frac{5EA_0}{4L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

اعتبر العنصر (2):





$$[k]^2 = \frac{EA_2}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}A_0 + 2A_0\right) = \frac{7}{4}A_0$$

$$\therefore [k]^2 = \frac{7EA_0}{4L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

$$\{\tilde{u}\} = [C]\{u\}$$

عليه، يمكن كتابة مصفوفة الإزاحة للعناصر (1) و(2) كالآتي:

$$\begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \qquad (12)$$

أو $\{\tilde{u}\} = [C]\{u\}$

من المعادلتين (10) و (11)،

$$[\tilde{k}] = \frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{bmatrix}$$

ولكن مصفوفة الكزازة للقضيب كله يمكن إعطاؤها كالآتي:

$$[k] = [C]^t[\tilde{k}][C]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix}5 & -5 & 0 & 0\\ -5 & 5 & 7 & -7\\ 0 & 0 & -7 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix}5 & -5 & 0\\ -5 & 12 & -7\\ 0 & -7 & 7\end{bmatrix}$$

3×4 4×3 3×3

$$=\frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix}5 & -5 & 0\\ -5 & 12 & -7\\ 0 & -7 & 7\end{bmatrix} \qquad (13)$$

من معادلة الاتزان، $[k]\{u\}=\{X\}$،

$$=\frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix}5 & -5 & 0\\ -5 & 12 & -7\\ 0 & -7 & 7\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{Bmatrix} \qquad (14)$$

بتطبيق الشروط الحدودية في المعادلة (14)،

$X_1 = X_1,\ X_2 = 0,\ X_3 = X_3$

$$\frac{EA_0}{4L}\begin{Bmatrix}5u_1-5u_2\\ -5u_1+12u_2-7u_3\\ -7u_2+7u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_1\\ 0\\ X_3\end{Bmatrix}$$

$$\frac{5EA_0}{4L}\left(u_1-u_2\right)=X_1 \qquad (15)$$

$$\frac{EA_0}{4L}\left(-5u_1+12u_2-7u_3\right)=0 \qquad (16)$$

$$\frac{7EA_0}{4L}\left(-u_2+u_3\right)=X_3 \qquad (17)$$

من المعادلة (16)،

$$-5u_1+12u_2-7u_3=0$$

$$-7u_3=5u_1-12u_2=0$$

$$\therefore u_3=\frac{12u_2-5u_1}{7}=\frac{12}{7}u_2-\frac{5}{7}u_1$$

بالتعويض عن قيمة u_3 في المعادلة (17)،

$$\frac{7EA_0}{4L}\left(-u_2+\frac{12}{7}u_2-\frac{5}{7}u_1\right)=X_3$$

$$\frac{7EA_0}{4L}\left(\frac{5}{7}u_2-\frac{5}{7}u_1\right)=X_3$$

$$-\frac{5}{7}\times\frac{7EA_0}{4L}(u_1-u_2)=X_3$$

$$\frac{-5EA_0}{4L}(u_1-u_2)=X_3$$

قوتان متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه، $\therefore X_1=-X_3$

لإيجاد الانفعالات والاجهادات:

الانفعال في العنصر (1)، $\varepsilon^1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=-\frac{u_1}{L}+\frac{u_2}{L}=\frac{u_2-u_1}{L}$

من المعادلة (15)،

$$\therefore \frac{u_2-u_1}{L}=\frac{4X_1}{5EA_0}$$

$$\therefore \varepsilon^{(1)}=-\frac{4X_1}{5EA_0}=\frac{4X_3}{5EA_0}$$

الإجهاد في العنصر (1)، $\therefore \sigma^1=E\varepsilon^1=E\times\frac{-4X_1}{5EA_0}=-\frac{4X_1}{5A_0}=\frac{4X_3}{5A_0}$

بما أنَّ $X_1 = -X_3$

اعتبر العنصر (2):

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{u_3 - u_2}{L}$$

$$\therefore \frac{u_3 - u_2}{L} = \frac{4X_3}{7EA_0}$$

$$\therefore \varepsilon^{(2)} = \frac{4X_3}{7EA_0} = \frac{-4X_1}{7EA_0}$$

$$\therefore \sigma^{(2)} = E\varepsilon^{(2)} = E \times \frac{4X_3}{7EA_0} = \frac{4X_3}{7A_0} = \frac{-4X_1}{7A_0}$$

$$\therefore \varepsilon_{average} = \frac{\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{4X_3}{5EA_0} + \frac{4X_3}{7EA_0}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{28X_3 + 20X_3}{35EA_0}\right]$$

$$= \frac{24X_3}{35EA_0}$$

$$\sigma_{average} = E\ \varepsilon_{average} = \frac{24}{35}\frac{X_3}{EA_0}$$

الفصل الثالث

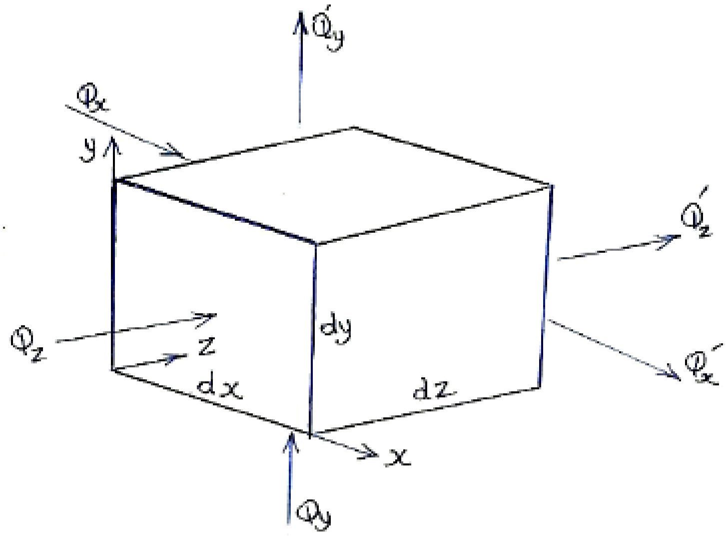
تطبيق طريقة العناصر المحدَّدة في إنتقال الحرارة

(Application of Finite Element Method in Heat Transfer)

3.1 المعادلة العامة للتوصيل للإحداثيات المستطيلة:

(General Conduction Equation of Cartesian Co-ordinates)

يمكن اشتقاق المعادلة العامة لجسم مصمت ذو ثلاث أبعاد تتولد فيه حرارة داخلية منتظمة نتيجة للتسخين الذري لجزيئات المادة، وتتغير فيه درجات الحرارة بالنسبة للزمن.



من قانون فورير للتوصيل: (Fourier's Law of conduction)

يقول قانون فورير: معدَّل سريان الحرارة خلال معدن مصمت متجانس مفرد يتناسب طردياً مع مساحة المقطع المتعامد مع إتجاه السريان ومع التغير في درجة الحرارة بالنسبة لطول ممر السريان $\frac{dt}{dx}$. (هذا قانون تجريبي مؤسس على المشاهدة).

$$Q\alpha - A\frac{dt}{dx}$$

$$Q\,dx = -kAdt$$

$$\int_0^x Qdx = -\int_{t_1}^{t_2} kadt$$

$$Qx = -kA(t_2 - t_1)$$

$$\therefore Q = \frac{-kA}{x}(t_2 - t_1) = \frac{kA}{x}(t_1 - t_2)$$

$$Q_x = -kA\frac{\partial t}{\partial x}(t_1 - t_2)$$

$$= -k(dy\ dz)\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$Q_y = -kA\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$= -k(dx\ dz)\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$Q_y = -kA\frac{\partial t}{\partial z}$$

$$= -k(dx\ dy)\frac{\partial t}{\partial z}$$

التغير في إتجاه في سريان الحرارة في إتجاه x،

$$Q'_x - Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x}dx = -k\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}dx\ dy\ dz$$

نفس الشئ بالنسبة لاتجاه z,y،

$$Q'_y - Q_y = \frac{\partial Q}{\partial y}dy = -k\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}dx\ dy\ dz$$

$$Q'_z - Q_z = \frac{\partial Q}{\partial z}dx = -k\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}dx\ dy\ dz$$

معدَّل توليد الحرارة: (rate of heat generation)

$$Q_g = q_g(dx\ dy\ dz)$$

معدَّل زيادة طاقة العنصر:

معدَّل زيادة طاقة العنصر = الكتلة × الحرارة النوعية × معدَّل تغير الحرارة بالنسبة للزمن

$$\text{معدَّل زيادة طاقة العنصر} = \ell(dx\ dy\ dz)C\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

موازنة الطاقة للعنصر تُعطي بالمعادلة التالية:

$$q_g(dx\ dy\ dz) - [(Q'_x - Q_x) + (Q'_y - Q_y) + (Q'_z - Q_z)] = \ell C(dx\ dy\ dz)\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$q_g(dx\ dy\ dz) - \left[-k\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}dx\ dy\ dz - k\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}dx\ dy\ dz - k\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}dx\ dy\ dz\right]$$

$$= \ell C(dx\ dy\ dz)\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

بقسمة طرفي المعادلة % dx dy dz نحصل على،

$$q_g - \left[-k\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} - k\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - k\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right] = \ell C\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

بقسمة طرفي المعادلة % k،

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{q_g}{k} = \frac{\ell C}{k}\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

ولكن $\alpha = \frac{k}{\ell C}$ (الانتشارية الحرارية) (thermal diffusivity)

الانتشارية الحرارية هي النسبة بين الموصلية الحرارية k والسعة الحرارية ρC.

إذا كانت قيمة α كبيرة فهذا يعني إما أنَّ قيمة k كبيرة أو قيمة ρCصغيرة ففي الحالة الأولي يكون هنالك انتقال حراري سريع وفي الحالة الثانية يكون امتصاص الحرارة بواسطة الجسم صغير.

معادلة ثلاثية البعد غير مستقرة: $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}+\frac{q_g}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial t}{\partial \tau}$

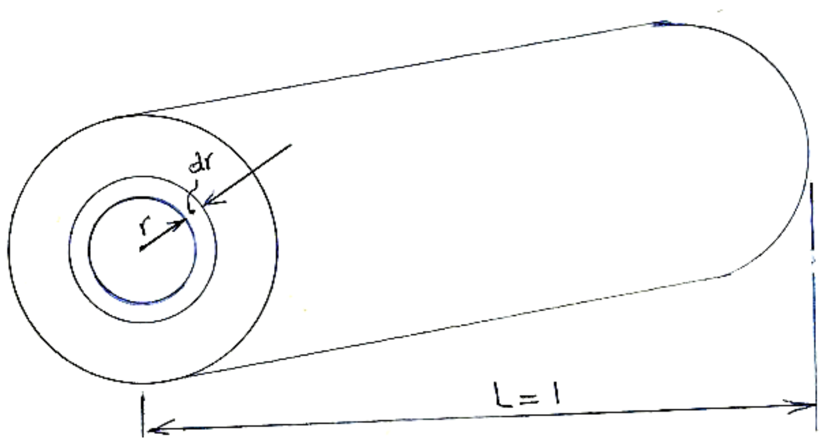
معادلة ثلاثية البعد مستقرة: $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}+\frac{q_g}{k}=0$

3.2 المعادلة العامة للتوصيل للإحداثيات الأسطوانية (القطبية):

(General Conduction Equation for Polar Co-ordinates)

اعتبر سريان الحرارة خلال عنصر صغير سمكه dr عند أي نصف قطر r، حيث درجة الحرارة هي t. أجعل الموصلية الحرارية للمادة k.

لوحدة طول في الاتجاه المحوري يمكن كتابة معادلة موازنة الطاقة كالآتي:



معادلة موازنة طاقة العنصر،

$$q_g\,2\pi r\,dr-\frac{\partial Q}{\partial r}dr=\rho c.2\pi r\,dr\,\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$q_g\,2\pi r\,dr-\frac{\partial}{\partial r}\left(-k2\pi r\frac{\partial t}{\partial t}\right)dr=\rho c.2\pi r\,dr\,\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

بقسمة طرفي المعادلة ÷ $2\pi dr$،

$$q_g r + \frac{\partial}{\partial r}\left(k \frac{\partial t}{\partial t}\right) = \rho c r \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$\therefore q_g r + \left(kr \frac{\partial^2 t}{\partial t^2} + k \frac{\partial t}{\partial r}\right) = \rho c r \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

بقسمة البسط والمقام ÷ kr

$$\therefore \frac{\partial^2 t}{\partial t^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{q_g}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

معرفة توزيع درجة الحرارة خلال جسم معين ذات أهمية كبيرة في الكثير من المسائل الهندسية. هذه المعلومة ستكون مفيدة في حساب الحرارة المكتسبة والحرارة المفقودة من الجسم. وهي مفيدة في تصميم الغلايات (Boilers)، التوربينات (Turbines)، الآلات النفاثة (Jet Engines)، وقوالب السباكة والصب (Casting and moulding dies).

المعادلات الأساسية لانتقال الحرارة، موازنة الطاقة ومعدَّل انتقال الحرارة يتم تلخيصها فيما يلي:

$$E^0_{in} + E^0_g = E^0_{out} + E^0_{i.e.} \qquad (1)$$

حيث E^0_{in} = سريان الطاقة إلي المنظومة (الطاقة الداخلية).

E^0_g = الطاقة المتولدة في المنظومة.

E^0_{out} = سريان الطاقة خارج المنظومة (الطاقة الخارجية).

$E^0_{i.e}$ = التغير في الطاقة الداخلية.

3.3 معادلات معدَّل انتقال الحرارة: (Rate Equations)

هذه المعادلات تصف معدَّل سريان الطاقة:

(i) التوصيل (conduction) (2) $q = -kA\frac{\partial t}{\partial x}$

(ii) الحمل (convection) (3) $q = hA(T - T_\infty)$

(iii) الإشعاع (radiation) (4) $q = \sigma \in A(T^4 - T_\infty^4)$

(iv) الطاقة المتولدة في الجسم المصمت، E_{in}^0

$$E_{in}^0 = q^\circ V \tag{5}$$

(v) الطاقة المختزنة، E_s^0

$$E_s^0 = \rho cv\frac{\partial T}{\partial t} \tag{6}$$

معادلة موازنة الطاقة هي،

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_g}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{7}$$

حيث $\alpha = \frac{k}{\rho c}$.

3.5 طريقة جاليركن: (Galerkin Approach)

طريقة العناصر المحدَّدة باستخدام أسلوب جاليركن يمكن وصفها بالخطوات التالية:

(i) قسِّم المنظومة لعدد من العناصر المحددة E تمتلك عدد من العقد مقدارها p.

(ii) افترض شكل مناسب من التفاوت في درجة الحرارة T في كل عنصر محدَّد وعبِّر عن $T^e(x, y, z)$ كالآتي:

$$T^e(x, y, z) = [N(x, y, z)]T^{-e}$$

في طريقة جاليركن فإنَّ المتبقي الوزنى لمنظومة العناصر يتم وضعه كصفر،

$$\iiint_{V^e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial T^e}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial T^e}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_{zx}\frac{\partial T^e}{\partial z}\right)+q^\circ\rho c\frac{\partial T^e}{\partial t}\right]dv=0 \quad (1)$$

ويمكن كتابتها كالآتي:

$$\left[k_1^e\right]T^e+\left[k_2^e\right]T^e+\left[k_3^e\right]T^e-p^e \qquad (2)$$

حيث،

$$\left[k_1^e\right]T^e=\int\iint[B]^t[D][B]dv \qquad (3)$$

$$\left[k_2^e\right]T^e=\iint h[N]^t[N]ds \qquad (4)$$

$$\left[k_3^e\right]T^e=\int\iint\rho c[N]^t[N]dv \qquad (5)$$

$$p^e=p_1^e-p_2^e+p_3^e \qquad (6)$$

$$p_1^e=\iiint\dot{q}[N]^t dv \qquad (7)$$

$$p_2^e=\iint q[N]^t dv \qquad (8)$$

$$p_3^e=\iiint hT_\infty[N]^t ds \qquad (9)$$

$$[D]=\begin{bmatrix}k_x & 0 & 0\\ 0 & k_y & 0\\ 0 & 0 & k_z\end{bmatrix} \qquad (10)$$

$$[N]=\begin{bmatrix}N_1(x) & N_2(x) & \cdots & N_p(x)\\ N_1(y) & N_2(y) & \cdots & N_p(y)\\ N_1(z) & N_2(z) & \cdots & N_p(z)\end{bmatrix}$$

$$[B]=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \ldots & \frac{\partial N_p}{\partial x}\\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \ldots & \frac{\partial N_p}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \ldots & \frac{\partial N_p}{\partial z}\end{bmatrix} \qquad (11)$$

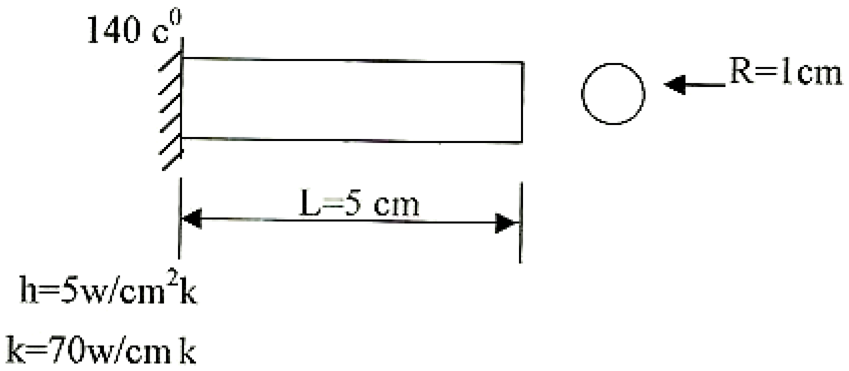
انتقال الحرارة أحادي البعد: (One dimensional heat transfer)

المعادلة التفاضلية كالآتي:

$$k = \frac{d^2T}{dx^2} + \dot{q} = 0 \qquad (12)$$

3.6 مثال (1):

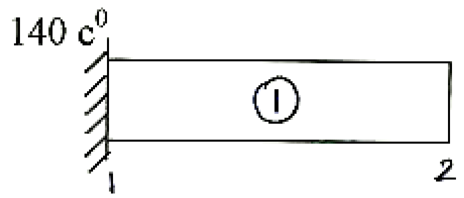
زعنف مستقيم منتظم: (straight uniform fin)



خطوات الحل:

(i) قسِّم القضيب إلي عدة عناصر محدَّدة

(idealize the rode into several finite elements)



(ii) افترض تفاوت درجة الحرارة خطي في أي عنصر e،

$$T^e(x) = a_1 + a_2 x \qquad (1)$$

العناصر a_1 و a_2 يمكن تمثيلهما بدلالة درجة الحرارة العقدية كالآتي:

$$a_1 = q_1, \quad \text{and} \quad a_2 = \frac{q_2 - q_1}{L^e} \qquad (2)$$

$$T^e(x)=[N(x)]q^e$$

$$=\left[1-\frac{x}{L^e} \quad \frac{x}{L^e}\right]\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

(iii) اشتقاق عناصر المصفوفات: (Derivation of elements matrices)

ولأن هذه المسألة أحادية البعد فإنَّ،

$[D] = [k]$ الموصلية الحرارية

$$[N]=[N_1(x) \quad N_2(x)]$$

$$[B]=\left[\frac{\partial N_1}{dx} \quad \frac{\partial N_2}{dx}\right]$$

$$=\left[-\frac{1}{L^e} \quad \frac{1}{L^e}\right]$$

$$[k_1^e]=\iiint [B]^t[D][B]dv$$

$$=\iiint_{x=0}^{L}\begin{Bmatrix} -\frac{1}{L^e} \\ \frac{1}{L^e} \end{Bmatrix}[k]\left[-\frac{1}{L^e} \quad \frac{1}{L^e}\right]A\,dx$$

$$=\frac{Ak}{{L^e}^2}\int\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}[-1 \quad 1]\,dx$$

$$=\frac{Ak}{{L^e}^2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}dx$$

$$=\frac{Ak}{{L^e}^2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}(x)_0^L=\frac{Ak}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

$$[k_2^e]=\iint h[N]^t[N]ds$$

$$= h\int_0^L \begin{Bmatrix} -\dfrac{x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -\dfrac{x}{L} & \dfrac{x}{L} \end{bmatrix} p\,dx$$

حيث p هو المحيط، $p = 2\pi R$

$$[k_2^e] = h\int_0^L \begin{Bmatrix} -\dfrac{L-x}{L} \\ \dfrac{L-x}{L} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -\dfrac{L-x}{L} & \dfrac{L-x}{L} \end{bmatrix} p\,dx$$

$$= \frac{hp}{L^2}\int_0^L \begin{bmatrix} L-x \\ x \end{bmatrix} [L-x \quad x]dx$$

$$= \frac{hp}{L^2}\int_0^L \begin{bmatrix} (L^2 - 2Lx + x^2) & (Lx - x^2) \\ (Lx - x^2) & x^2 \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{hp}{L^2} \begin{bmatrix} \left(L^2x - \dfrac{2Lx^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}\right) & \left(\dfrac{Lx^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}\right) \\ \left(\dfrac{Lx^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}\right) & \dfrac{x^3}{3} \end{bmatrix}_0^L$$

$$= \frac{hp}{L^2} \begin{bmatrix} \left(L^3 - L^3 + \dfrac{L^3}{3}\right) & \left(\dfrac{L^3}{2} - \dfrac{L^3}{3}\right) \\ \left(\dfrac{L^3}{2} - \dfrac{L^3}{3}\right) & \dfrac{L^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{hp}{L^2} \begin{bmatrix} \dfrac{L^3}{3} & \dfrac{L^3}{6} \\ \dfrac{L^3}{6} & \dfrac{L^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{hp}{L^2}\begin{bmatrix} \frac{2L^3}{6} & \frac{L^3}{6} \\ \frac{L^3}{6} & \frac{2L^3}{6} \end{bmatrix} = \frac{hp}{L^2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{hpL^e}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

افترض حالة مستقرة، $[k_3^e] = 0$،

$$p^e = p_1^e - p_2^e + p_3^e \qquad (6)$$

$$p_1^e = \iiint \dot{q}[N]^t \, dv \qquad (7)$$

$$p_1^e = \int_{x=0}^{L} \dot{q}\begin{Bmatrix} 1-\frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} A\,dx$$

$$p_1^e = \dot{q}A\int_{x=0}^{L}\begin{Bmatrix} 1-\frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} dx = \dot{q}A\int_{x=0}^{L}\begin{Bmatrix} \frac{L-x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} dx = \frac{\dot{q}A}{L}\int_{x=0}^{L}\begin{Bmatrix} L-x \\ x \end{Bmatrix} dx$$

$$p_1^e = \frac{\dot{q}A}{L}\begin{Bmatrix} Lx-\frac{x^2}{2} \\ \frac{x^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{\dot{q}A}{L}\begin{Bmatrix} L^2-\frac{L^2}{2} \\ \frac{L^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{\dot{q}A}{L}\begin{Bmatrix} \frac{L^2}{2} \\ \frac{L^2}{2} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{\dot{q}AL^2}{2L}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\dot{q}ALe}{2L}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

$$p_2^e = \int_0^L \int q[N]^t \, ds \qquad (9)$$

$$= \int_{x=0}^{L} q \begin{Bmatrix} 1-\dfrac{x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} p \; dx$$

$$= qp \int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} 1-\dfrac{x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} dx = qp \int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} \dfrac{L-x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} dx = \frac{qp}{L^e} \int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} L-x \\ x \end{Bmatrix} dx$$

$$\frac{qp}{L} \begin{Bmatrix} Lx-\dfrac{x^2}{2} \\ \dfrac{x^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{qp}{L} \begin{Bmatrix} L^2-\dfrac{L^2}{2} \\ \dfrac{L^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{qp}{L} \times \frac{L^2}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore p_2^e = \frac{qpL^e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (10)$$

$$p_3^e = \int_0^L hT_\infty [N]^t \, ds$$

$$= \int_{x=0}^{L} hT_\infty \begin{Bmatrix} 1-\dfrac{x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} pdx$$

$$= hT_\infty p \int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} 1-\dfrac{x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} dx = hT_\infty p \begin{Bmatrix} \dfrac{L-x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} dx$$

$$= \frac{hT_\infty p}{L} \int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} L-x \\ x \end{Bmatrix} dx = \frac{hT_\infty p}{L} \begin{bmatrix} Lx-\dfrac{x^2}{2} \\ \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix}_0^L$$

$$=\frac{hT_{\infty}p}{L}\begin{Bmatrix}\frac{x^2}{2}\\ \frac{x^2}{2}\end{Bmatrix}=\frac{hT_{\infty}pL^2}{L}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}=\frac{hT_{\infty}pL}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} \qquad (11)$$

$$\left[\tilde{k}\right]=\vec{T}=\vec{P} \qquad (12)$$

$$[\tilde{k}]=\sum_{e=1}^{E}\left(\frac{Ak}{L^e}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\frac{hpL^e}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right) \qquad (13)$$

$$[\tilde{k}]=\begin{bmatrix}\left(\frac{Ak}{L}+\frac{2phL}{6}\right) & \left(\frac{-Ak}{L}+\frac{2phL}{6}\right)\\ \left(\frac{-Ak}{L}+\frac{2phL}{6}\right) & \left(\frac{Ak}{L}+\frac{2phL}{6}\right)\end{bmatrix} \qquad (14)$$

$$\vec{p}=\sum_{e=1}^{E}\frac{1}{2}\left(\dot{q}AL^e-qpL^e+hT_{\infty}pL^e\right)\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} \qquad (15)$$

في هذه الحالة $\dot{q}=0=q$،

وعليه عندما $E = 1$،

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{Ak}{L}+\frac{2phL}{6}\right) & \left(\frac{-Ak}{L}+\frac{2phL}{6}\right)\\ \left(\frac{-Ak}{L}+\frac{2phL}{6}\right) & \left(\frac{Ak}{L}+\frac{2phL}{6}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1\\ T_2\end{bmatrix}=\frac{hpT_{\infty}L^2}{2kA}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad (16)$$

$$\begin{bmatrix}\left(1+\frac{hpL^2}{3kA}\right) & \left(-1+\frac{hpL^2}{6kA}\right)\\ \left(-1+\frac{hpL^2}{6kA}\right) & \left(1+\frac{hpL^2}{3kA}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1\\ T_2\end{bmatrix}=\frac{hpT_{\infty}L^2}{2kA}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad (17)$$

بالتعويض عن القيم المعطاة بالمسألة،

$$\frac{hpL^2}{kA}=\frac{5\times 2\pi\times 1\times 5^2}{70\times\pi\times 1^2}=\frac{5\times 2\pi\times 5^2}{70\pi}=\frac{25}{7}$$

$$\frac{hpT_\infty L^2}{2kA}=\frac{5\times 2\pi\times 1\times 40\times 25}{2\times 70\times \pi\times 1^2}=\frac{500}{7}$$

$$\begin{bmatrix} \left(1+\frac{25}{21}\right) & \left(-1+\frac{25}{42}\right) \\ \left(-1+\frac{25}{42}\right) & \left(1+\frac{25}{21}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}=\frac{500}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بما أنَّ $T_1 = 140^oC$،

$$\begin{bmatrix} \frac{46}{21} & -\frac{17}{42} \\ -\frac{17}{42} & \frac{46}{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 140 \\ T_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{500}{7} \\ \frac{500}{7} \end{bmatrix}$$

$$\frac{46}{21}\times 140-\frac{17}{42}T_2=\frac{500}{7} \qquad (1)$$

$$-\frac{17}{42}\times 140+\frac{46}{21}T_2=\frac{500}{7} \qquad (2)$$

من المعادلة (1)،

$$T_2=\left(\frac{46\times 140}{21}-\frac{500}{7}\right)\times\frac{42}{17}=\underline{581.2}^\circ C$$ (rejected) مرفوضة

من المعادلة (2)،

$$T_2=\left(\frac{500}{7}+\frac{42}{17}\times 140\right)\times\frac{21}{46}=\underline{58.5}^\circ C$$ (مقبولة)

من المعادلة (17) بالنسبة للعنصرين،

$$[\tilde{k}]=\begin{bmatrix} \left(1+\frac{hpL^2}{3kA}\right) & \left(-1+\frac{hpL^2}{6kA}\right) & 0 & 0 \\ \left(-1+\frac{hpL^2}{6kA}\right) & \left(1+\frac{hpL^2}{3kA}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1+\frac{hpL^2}{3kA}\right) & \left(-1+\frac{hpL^2}{6kA}\right) \\ 0 & 0 & \left(-1+\frac{hpL^2}{6kA}\right) & \left(1+\frac{hpL^2}{3kA}\right) \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{k}]=\begin{bmatrix} \left(1+\frac{hpL^2/4}{3kA}\right) & \left(-1+\frac{hpL^2/4}{6kA}\right) & 0 \\ \left(-1+\frac{hpL^2/4}{6kA}\right) & 2\left(1+\frac{hpL^2/4}{3kA}\right) & \left(-1+\frac{hpL^2/4}{6kA}\right) \\ 0 & \left(-1+\frac{hpL^2/4}{6kA}\right) & \left(1+\frac{hpL^2/4}{3kA}\right) \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{k}]=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_2 & 2a_1 & a_2 \\ 0 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

حيث،

$$a_1=1+\frac{2hpL^2}{24kA},\quad a_2=-1+\frac{hpL^2}{24kA}$$

أيضاً من المعادلة (17)، بالنسبة لعنصرين،

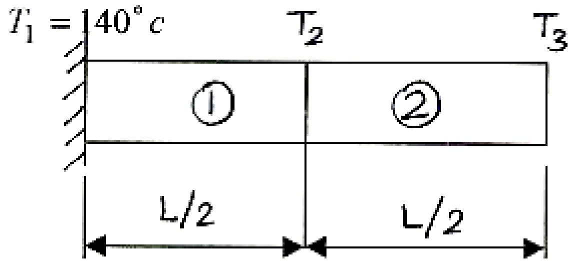
$$\vec{p}=\begin{bmatrix} \frac{hpT_\infty L^2/4}{2Ak} & 0 \\ \frac{hpT_\infty L^2/4}{2Ak} & \frac{hpT_\infty L^2/4}{2Ak} \\ 0 & \frac{hpT_\infty L^2/4}{2Ak} \end{bmatrix}$$

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} \dfrac{hpT_\infty L^2}{8Ak} \\ \dfrac{2hpT_\infty L^2}{8Ak} \\ \dfrac{hpT_\infty L^2}{8Ak} \end{bmatrix}$$

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} b \\ 2b \\ b \end{bmatrix}$$

∴ المعادلة (17) ستصبح كالآتي:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_2 & 2a_1 & a_2 \\ 0 & a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} b \\ 2b \\ b \end{Bmatrix} \qquad (18)$$



عوِّض عن قيم A, k, L, p, h

$$a_1 = 1 + \frac{2 \times 25}{24 \times 7} = \frac{109}{84}$$

$$a_2 = -1 + \frac{2 \times 25}{24 \times 7} = -\frac{143}{168}$$

$$b = \frac{hpT_\infty L^2}{8Ak} = \frac{500}{28}$$

عوِّض في المعادلة (18)،

$$\begin{bmatrix} \frac{109}{84} & -\frac{143}{168} & 0 \\ -\frac{143}{168} & \frac{109}{84} & -\frac{143}{168} \\ 0 & -\frac{143}{168} & \frac{109}{84} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 140 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{500}{28} \\ \frac{1000}{28} \\ \frac{500}{28} \end{Bmatrix} \qquad (19)$$

حل المعادلة عندما $T_1 = 140°C$،

$$\frac{109}{84} \times 140 - \frac{143}{168} T_2 = \frac{500}{28} \qquad (1)$$

$$T_2 = \left(\frac{109}{84} \times 140 - \frac{500}{28}\right) \frac{168}{143} = \underline{192.45}°C$$ مرفوضة (rejected)

بما أنَّ 140 < 192.45،

$$-\frac{143}{168} \times 140 + \frac{109}{42} T_2 - \frac{143}{168} T_3 = \frac{500}{28}$$

$$\frac{109}{42} T_2 - \frac{143}{168} T_3 = \frac{1000}{28} + \frac{143}{168} \times 140 \qquad (2)$$

$$-\frac{143}{168} T_2 + \frac{109}{42} T_3 = \frac{500}{28} \qquad (3)$$

بجمع المعادلتين (2) و (3)، لتصبحا،

$$2.6T_2 - 0.851T_3 = 154.9 \qquad (2)$$

$$-0.851T_2 + 2.6T_3 = 17.86 \qquad (3)$$

بضرب المعادلة (3) في $\frac{0.851}{2.6}$ لتصبح،

$$-0.28T_2 + 0.851T_3 = 5.85 \qquad (4)$$

بجمع المعادلتين (2) و(4) نحصل على،

$$(2.6 - 0.28)T_2 + 0 = 154.9 + 5.85$$

$$2.32T_2 = 160.75$$

$$\therefore T_2 = \frac{160.7}{2.32} = \underline{\underline{69.3}}°C$$

نعوِّض عن قيمة T_2 في المعادلة (2)،

$$2.6 \times 69.3 - 0.851T_3 = 154.9$$

$$\therefore T_3 = \frac{2.6 \times 69.3 - 154.9}{0.851} = \underline{\underline{29.7}}°C$$

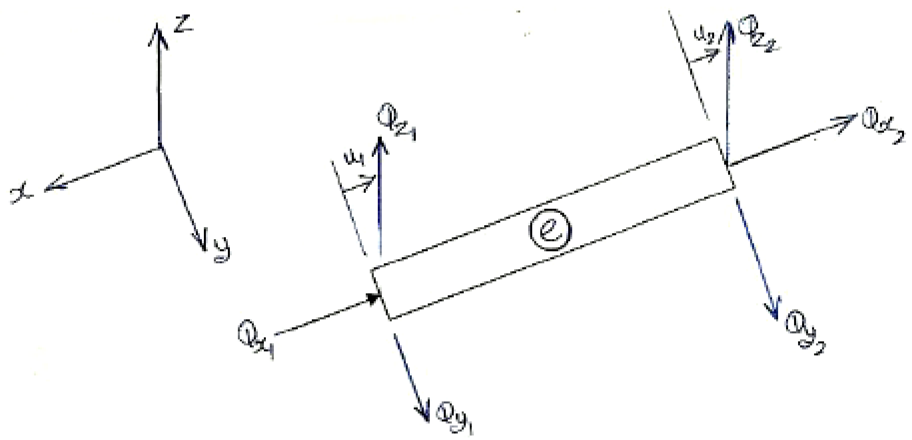
الفصل الرابع

تحليل الجملونات

(Analysis of Trusses)

4.1 العنصر الفراغي للجملون: (Space Truss Element)

اعتبر الوصلة المسمارية الموضَّح في الشكل (4.1) أدناه:



شكل (4.1)

u_1، u_2 تمثِّل درجات الحرية العقدية في الإحداثيات الموضعية للمنظومة. Q_x, Q_y, Q_z تمثِّل الإزاحة الكونية للمنظومة.

عليه،

$$u_1 = L_{12}Q_{x1} + m_{12}Q_{y1} + n_{12}Q_{z1}$$

$$u_2 = L_{12}Q_{x2} + m_{12}Q_{y2} + n_{12}Q_{z2}$$

حيث،

$$L_{12} = \cos\theta_x$$

$$m_{12} = \cos\theta_y$$

$$n_{12} = \cos\theta_z$$

$$\{u\}^e = [C]\{\theta\}$$

حيث،

$$[C] = \begin{bmatrix} L_{12} & m_{12} & n_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{12} & m_{12} & n_{12} \end{bmatrix}$$

وتُسمي بمصفوفة التحويل (transformation matrix).

$$L_{12} = \frac{x_2 - x_1}{L}$$

$$m_{12} = \frac{y_2 - y_1}{L}$$

$$n_{12} = \frac{z_2 - z_1}{L}$$

حيث،

الطول، $L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

متجه الحمل يمكن الحصول عليه من:

$$\{p\} = [C]^t \{p\}$$

مصفوفة الكزازة هي،

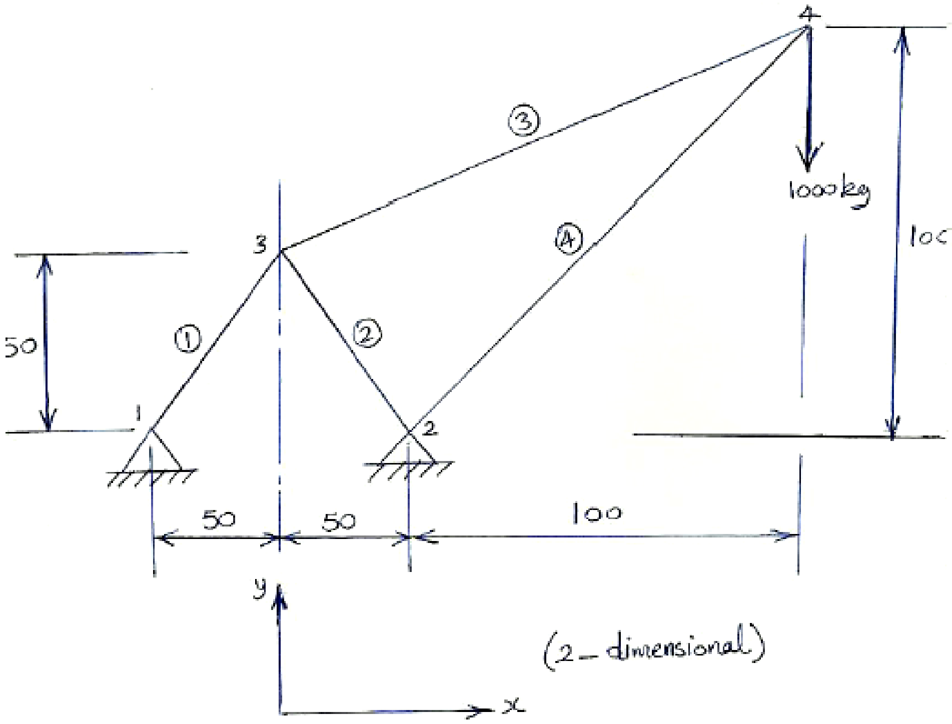
$$[k] = [C]^t [k][C]$$

4.2 مثال (1):

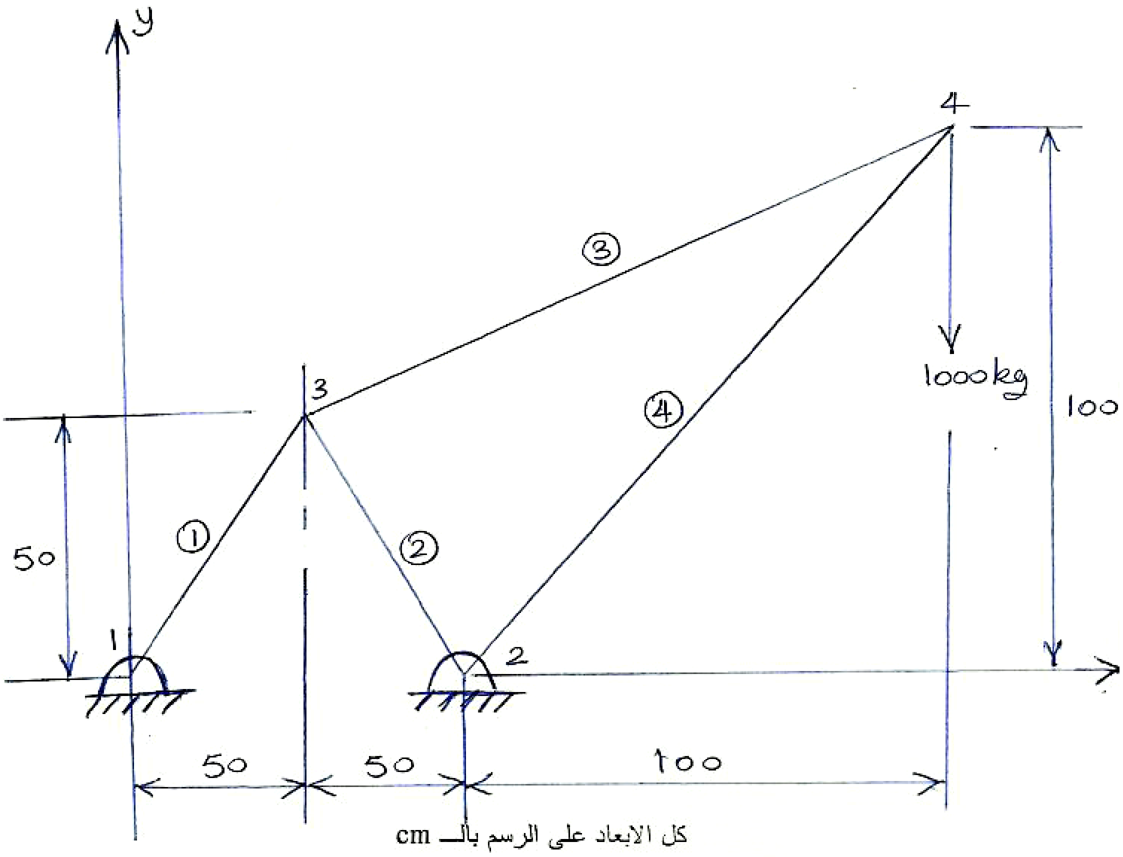
أوجد الإزاحة العقدية الإجهادات الداخلية التي تنشأ في الجملون الموضّح في الشكل أدناه عندما يتم تطبيق قوة رأسية إلي أسفل عند العقدة 4 مقدارها 1000kg. معاير يونق للمرونة يعادل $2\times10^6 kg/cm^2$ ومساحة المقطع العرضي للأجزاء الأربعة كالآتي:

A1 A2 A3 A4

2cm² 2cm² 1cm² 1cm²



كل الابعاد على الرسم بالـ cm



كل الابعاد على الرسم بالـ cm

رقم العنصر أو الجزء	العقدة الكونية المقابلة لـ		x_2	x_1	y_1	y_2	الطول L	جيوب التمام	
	العقدة الموضعية 2	العقدة الموضعية 1						L_{12}	m_{12}
1	1	3	0	0	50	50	$50\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
2	3	2	50	50	100	0	$50\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
3	3	4	50	50	200	100	$50\sqrt{10}$	$\frac{3}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$
4	2	4	100	0	200	100	$100\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

العنصر رقم (1)، الطول L،

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$L = \sqrt{50^2 + 50^2 + 0^2} = \sqrt{500} = \sqrt{2500 \times 2} = \underline{50\sqrt{2}}$$

العنصر رقم (2)،

$$L = \sqrt{50^2 + \left(-50^2\right)} = \underline{50\sqrt{2}}$$

العنصر رقم (3)،

$$L = \sqrt{150^2 + 50^2} = \sqrt{25{,}000} = \sqrt{2500 \times 10} = \underline{50\sqrt{2}}$$

العنصر رقم (4)،

$$L = \sqrt{100^2 + 100^2} = \sqrt{20{,}000} = \sqrt{10{,}000 \times 2} = \underline{100\sqrt{2}}$$

جيوب تمام الاتجاه: (Direction cosines)

العنصر (1)،

$$L_{12}=\frac{x_2-x_1}{L}=\frac{50}{50\sqrt{2}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$m_{12}=\frac{y_2-y_1}{L}=\frac{50}{50\sqrt{2}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

العنصر رقم (2)،

$$L_{12}=\frac{50}{50\sqrt{2}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$m_{12}=-\frac{50}{50\sqrt{2}}=-\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

العنصر رقم (3)،

$$L_{12}=\frac{150}{50\sqrt{2}}10=\underline{\frac{3}{\sqrt{10}}}$$

$$m_{12}=\frac{50}{50\sqrt{10}}=-\underline{\frac{1}{\sqrt{10}}}$$

العنصر رقم (4)،

$$L_{12}=\frac{100}{100\sqrt{2}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$m_{12}=\frac{100}{100\sqrt{2}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

تحديد مصفوفة الكزازة للعناصر الأربعة:

العنصر رقم (1)،

$$[k]^1=[C]^T[k]^e[C]$$

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [k]^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{EA_1}{L_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{2\times 10^6 \times 2}{50\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2\sqrt{2}\times 10^4\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2\sqrt{2}\times 10^4\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{kg/cm} \qquad (1)$$

العنصر رقم (2)،

$$[k]^2 = \frac{EA_2}{L_2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2\times 10^6 \times 2}{50\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[C]^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [k]^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\frac{2\times10^6\times2}{50\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= 2\sqrt{2}\times10^4\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= 2\sqrt{2}\times10^4\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\text{kg/cm} \qquad (2)$$

العنصر رقم (3)،

$$[k]^e = \frac{EA_3}{L_3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2\times10^6\times1}{50\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2\sqrt{10}}{5}\times10^4\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad [C]^T = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [k]^3 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{2\sqrt{10}}{5}\times10^4\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 4\sqrt{10}\times10^4\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \\ -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 4\sqrt{10}\times10^4\begin{bmatrix} 9 & 3 & -9 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ -9 & -3 & 9 & 3 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\mathrm{kg/cm} \qquad (3)$$

العنصر رقم (4)،

$$[k]^4 = \frac{EA_4}{L_4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2\times10^6\times1}{100\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{4}\times10^4\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [C]^T = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [k]^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\sqrt{2}\times10^4\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [k]^4 = 4\sqrt{10}\times10^4\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\mathrm{kg/cm} \qquad (4)$$

للانسجام بين العناصر المتجاورة: (For compatibility)

$$\{u\}^e = [C]\{Q\}$$

$$
\begin{Bmatrix} u^1x_1 \\ u^1y_1 \\ u^1x_2 \\ u^1y_2 \\ u^2x_1 \\ u^2y_1 \\ u^2x_2 \\ u^2y_2 \\ u^3x_1 \\ u^3y_1 \\ u^3x_2 \\ u^3y_2 \\ u^4x_1 \\ u^4y_1 \\ u^4x_2 \\ u^4x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Qx_1 \\ Qy_1 \\ Qx_2 \\ Qy_2 \\ Qx_3 \\ Qy_3 \\ Qx_4 \\ Qy_4 \end{Bmatrix}
$$

مصفوفة الكزازة الكلية يمكن إعطاؤها كالآتي:

$$
[k] = [C]^T [\tilde{k}][C]
$$

$$
[\tilde{k}] = \begin{bmatrix} [k]^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [k]^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [k]^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [k]^4 \end{bmatrix}
$$

$$
\left[\tilde{k}\right]=\begin{bmatrix}
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{-9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{1}{10\sqrt{5}} & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-1}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-9}{10\sqrt{5}} & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{9}{10\sqrt{5}} & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-1}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{1}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}
\end{bmatrix}
$$

$$
\therefore\left[k\right]=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$(8\times 16)$$

$$\times\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{-9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{1}{10\sqrt{5}} & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-1}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-9}{10\sqrt{5}} & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{9}{10\sqrt{5}} & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-1}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{1}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$2\sqrt{2}\times10^4\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \frac{20\sqrt{5}+9}{10\sqrt{5}} & \frac{7.5\sqrt{5}+3}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & \frac{7.5\sqrt{5}+3}{10\sqrt{5}} & \frac{22.5\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}} & \frac{-2.5\sqrt{5}-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-2.5\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2.5\sqrt{5}-9}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2.5\sqrt{5}-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-2.5\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}} & \frac{-2.5\sqrt{5}+3}{10\sqrt{5}} & \frac{2.5\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

للاتزان: (For equilibrium)

$$[k]\{u\}=\{P\}$$

$$2\sqrt{2}\times10^4\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \frac{9+20\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{3+7.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & \frac{3+7.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{1+22.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{-3-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{-1-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-9-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{-1-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{3+2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{1+2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_2 \\ u_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} Px_1 \\ Py_1 \\ Px_2 \\ Py_2 \\ Px_3 \\ Py_3 \\ Px_4 \\ Py_4 \end{Bmatrix}$$

الشروط الحدودية: (Boundary conditions)

$$u_1=0,\quad u_2=0$$

$$Py_4=1000\text{kg},\quad Px_4=0$$

$$2\sqrt{2}\times10^4(u_3-u_3-u_4)=Px_1$$

$$\therefore Px_1=-2\sqrt{2}\times10^4u_4 \qquad (1)$$

$$2\sqrt{2}\times10^4(u_2-u_3-u_4)=Py_1$$

$$\therefore Py_1 = -2\sqrt{2} \times 10^4 u_4 \qquad (2)$$

$$2\sqrt{2} \times 10^4 (-u_3 + u_3) = Px_2$$

$$\therefore Px_2 = 0 \qquad (3)$$

$$2\sqrt{2} \times 10^4 (-u_3 + u_3) = Py_2$$

$$\therefore Py_2 = 0 \qquad (4)$$

(5)

$$2\sqrt{2} \times 10^4 \left(-u_3 - u_3 + \left(\frac{9 + 20\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} \right) u_3 + \left(\frac{3 + 7.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} \right) u_4 \right) = Px_3$$

$$2\sqrt{2} \times 10^4 \left(-u_3 + u_3 + \left(\frac{3 + 7.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} \right) u_3 + \left(\frac{1 + 22.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} \right) u_4 + \left(\frac{-1 - 2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} \right) u_4 \right) = Py_3 \qquad (6)$$

$$2\sqrt{2} \times 10^4 \left(\frac{-9 - 2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} \right) u_3 = Px_4 \qquad (7)$$

$$2\sqrt{2} \times 10^4 \left(\frac{-3 - 2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} \right) u_3 + \left(\frac{-1 + 2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} \right) u_4 + \left(\frac{1 + 2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} \right) u_4 = Py_4 \qquad (8)$$

من المعادلة (8)،

$$2\sqrt{2} \times 10^4 \left(\frac{-3 - 2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} \right) u_3 = 100$$

$$\therefore u_3 = \frac{1000}{2\sqrt{2} \times 10^4} \times \frac{10\sqrt{5}}{-3 - 2.5\sqrt{5}}$$

$$= \underline{\underline{-0.9203}}\text{cm}$$

الفصل الخامس

انحراف العارضات باستخدام طريقة العناصر المحدَّدة

(Deflection of Beams Using Finite Element Method)

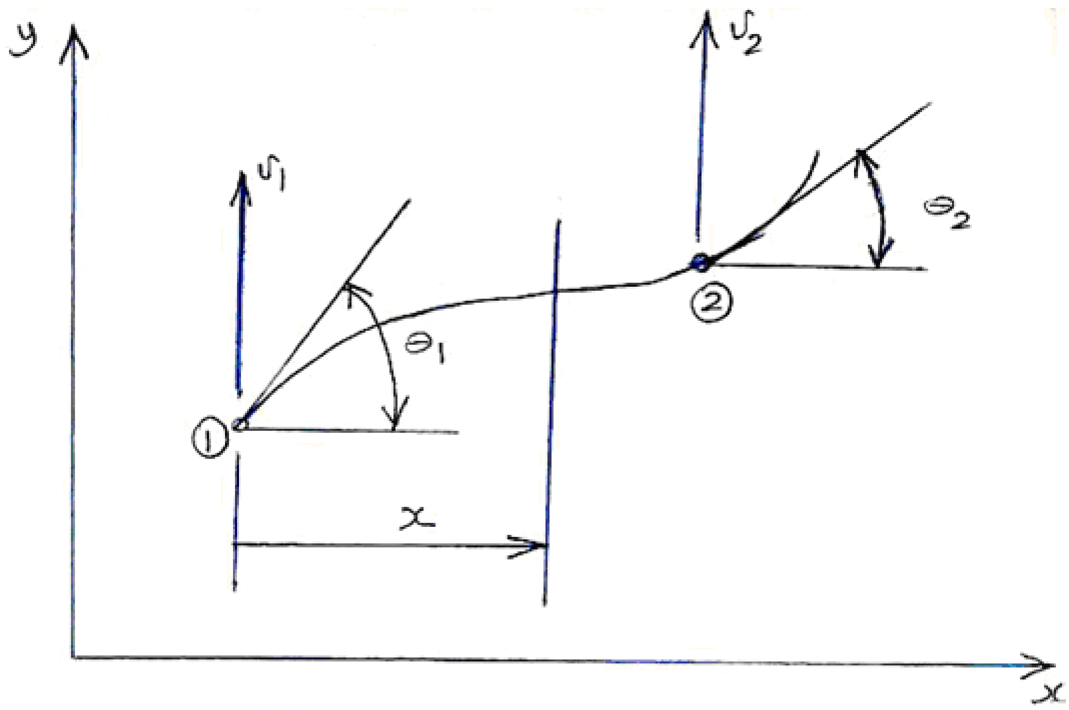
طبقاً للنظرية الهندسية لانحراف العارضات فإنَّ تغير الشكل يتم تحديده بمنحني الانحراف (deflection curve) $v(x)$ المأخوذ عند خط منتصف القضيب، وهكذا فإنَّ مسألة انحراف العارضات هي أحادية البعد ومحدَّدة العنصر تحتوي على عنصر خطي.

نعرف من ميكانيكا المواد أنَّ طاقة الانفعال تحتوي على $v''(x)$، عليه وللاستمرارية،

$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = [f(x)]\{a\} \qquad (1)$$

وهكذا فإنَّ العنصر يجب أن يمتلك أربعة درجات حرية.

كما في الشكل السابق فإننا نعتبر الإزاحات العقدية والميلانات ككميات متجهة، كما في الشكل (5.1) أدناه.



شكل (5.1)

الإزاحة العقدية ، $\left[u^e\right]^t = \left[v_1 \left(\frac{dv(x)}{dx}\right)_1 \quad v_2 \left(\frac{dv(x)}{dx}\right)_2 \right]$ (2)

عند $x = 0$ و $x = L$ في المعادلة (1)،

$$v(x) = [f(x)]\{a\} \tag{1}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

$$[u]^e = [A]\{a\} \tag{4}$$

$$\{a\} = [A]^{-1}\{u\}^e$$

يمكن إعادة كتابة المعادلة (1) كالآتي:

$$v^e(x) = [f(x)][A]^{-1}\{u\}^e$$

$$= [N(x)]\{u\}^e \tag{5}$$

حقيقة،

$$[N(x)] = [f(x)][A]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}A}{|A|} = \frac{C^T}{|A|}$$

$$|A| = 1\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ L & L^2 & L^3\\ 1 & 2L & 3L^2\end{bmatrix} + 0 = 1\times\begin{bmatrix}L^2 & L^3\\ 2L & 3L^2\end{bmatrix} = 3L^4 - 2L^4 = L^4$$

مصفوفة المرافق C،

$$A_{11} = +\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ L & L^2 & L^3\\ 1 & 2L & 3L^2\end{vmatrix} = L^4$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & L^2 & L^3\\ 0 & 2L & 3L^2\end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & L & L^3\\ 0 & 1 & 3L^2\end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix}1 & L^3\\ 0 & 3L^2\end{vmatrix} = -3L^2$$

$$A_{14} = +\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & L & L^2\\ 0 & 1 & 2L\end{vmatrix} = +\begin{vmatrix}1 & L^2\\ 0 & 2L\end{vmatrix} = 2L$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ L & L^2 & L^3\\ 1 & 2L & 3L^2\end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = +\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & L^2 & L^3\\ 0 & 2L & 3L^2\end{vmatrix} = +\begin{vmatrix}L^2 & L^3\\ 2L & 3L^2\end{vmatrix} = 3L^4 - 2L^4 = L^4$$

$$A_{23} = +\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & L & L^3\\ 0 & 1 & 3L^2\end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix}L & L^3\\ 1 & 3L^2\end{vmatrix} = 3L^3 - L^3 = 2L^3 = -2L^3$$

$$A_{24} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 \\ 0 & 1 & 2L \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} L & L^2 \\ 1 & 2L \end{vmatrix} = 2L - L^2 = L^2$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2L & 3L^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2L & 3L^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2L & 3L^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3L^2 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3L^2 \end{vmatrix} = 3L^2$$

$$A_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2L \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2L \end{vmatrix} = 2L$$

$$A_{41} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ L & L^2 & L^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{42} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & L^2 & L^3 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ L^2 & L^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & L & L^3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ L & L^3 \end{vmatrix} = -L^3$$

$$A_{44} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & L & L^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & L \\ L & L^2 \end{vmatrix} = L^2$$

$$
C=\begin{bmatrix} L^4 & 0 & -3L^2 & 2L \\ 0 & L^4 & -2L^3 & L^2 \\ 0 & 0 & 3L^2 & 2L \\ 0 & 0 & -L^3 & L^2 \end{bmatrix}
$$

$$
\operatorname{adj} A = C^T = \begin{bmatrix} L^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_4 & 0 & 0 \\ -3L^2 & -2L^3 & 3L^2 & -L^3 \\ 2L & L^2 & 2L & L^2 \end{bmatrix}
$$

$$
\therefore A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{|A|} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{L^2} & -\dfrac{2}{L} & \dfrac{3}{L^2} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{2}{L^3} & \dfrac{1}{L^2} & \dfrac{2}{L^3} & \dfrac{1}{L^2} \end{bmatrix}
$$

$$
[N(x)] = [f(x)][A]^{-1}
$$

$$
= [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{L^2} & -\dfrac{2}{L} & \dfrac{3}{L^2} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{2}{L^3} & \dfrac{1}{L^2} & \dfrac{2}{L^3} & \dfrac{1}{L^2} \end{bmatrix}
$$

(6)

$$
= \left[\left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) \quad \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \quad \left(\frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) \quad \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \right]
$$

لنخطو خطوة للأمام فإننا نحتاج لإيجاد $v''(x)$،

$$
v''(x) = [N''(x)]\{u\}^e \qquad (7)
$$

طاقة الانفعال للانحراف تُعطي كالآتي:

$$U^e = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(v''(x)\right)^2 dx \qquad (8)$$

$$U = \int M^2 dx / 2EI$$

بوضع $EI = [D]$،

$$M = EI\frac{d^2v}{dx^2}$$

$$U^e = \frac{1}{2}\{u^e\}^t\left(\int_0^L [B]^t[D][B]dx\right)\{u\}^e \qquad (9)$$

لقضيب منتظم الشكل: (for a uniform bar)

$$[k]^e = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^4 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^4 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

$$[k]^e = \int_0^L [B]^t[D][B]dx$$

يتم الحصول على المعادلة (10) عاليه كالآتي:

للعنصر الأول،

$$[N(x)] = \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)$$

$$N'(x) = 0 - \frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3}$$

$$N''(x) = \frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}$$

$$[k]^e = EI\int_0^L \left(\frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right)^2 dx$$

$$= EI\int_0^L \left(\frac{36}{L^4} - \frac{144x}{L^5} + \frac{144x^2}{L^6}\right) dx$$

$$= EI\left[\frac{36x}{L^4} - \frac{144x^2}{2L^5} + \frac{144x^3}{3L^6}\right]_0^L$$

$$= EI\left(\frac{36L}{L^4} - \frac{144L^2}{2L^5} + \frac{144L^3}{3L^6}\right)$$

$$= \frac{EI}{L^3}(36 - 72 + 48) = \frac{EI}{L^3}(12)$$

بمتابعة بقية العناصر يمكن الحصول على المعادلة (10)،

طاقة الوضع للأحمال الخارجية،

$$\Omega = -\sum\int_0^L \{u\}^e [N(x)]^e P(x) dx - \{u\}^e [P_c] \qquad (11)$$

حيث، $\{P_c\} = P_1, M_1, P_2, M_2$

أو $\Omega = -\sum \{u^e\}^t [N_d]^e - \{u\} \ \{P_c\}$ (12)

للانسجام: (For compatibility)

$$v_1^1 = v_1$$

$$\theta_1^1 = \theta_1$$

$$v_2^1 = v_2$$

$$\theta_2^1 = \theta_2$$

$$\{\tilde{u}\} = [C]\{u\}$$

طاقة الوضع الكلية،

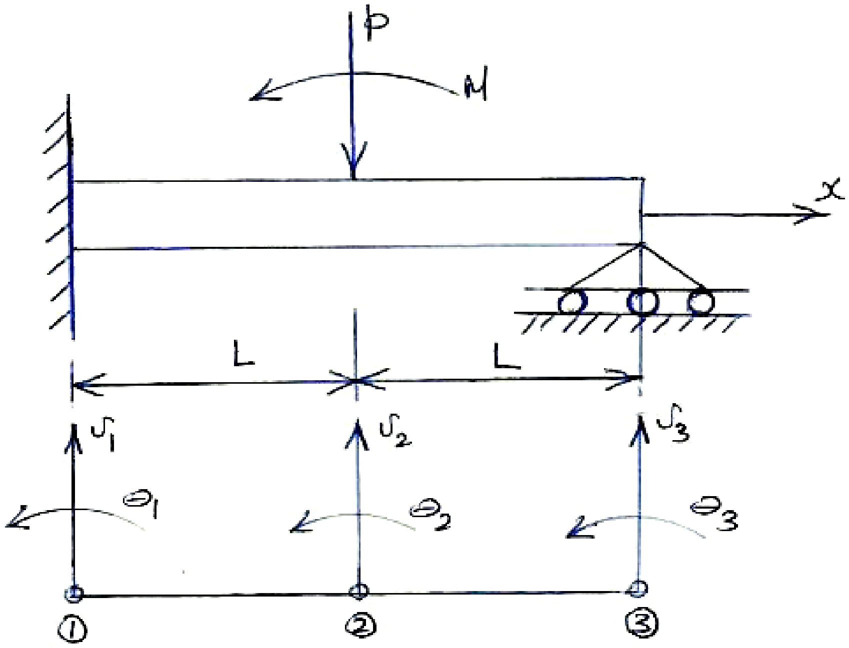
$$V = \frac{1}{2}\{u\}^t[k]\{u\} - \{u\}^t(\{P_d\} + \{P_c\})$$

للاتزان، $\delta V = 0$، عليه سنتحصل على،

$$[k]\{u\} = \{P\}$$

$$= \{\{P_d\} + \{P_c\}\}$$

5.2 مثال(1):



للانسجام: (For compatibility)

$$\begin{Bmatrix} v_1^1 \\ \theta_1^1 \\ v_2^1 \\ \theta_2^1 \\ v_1^2 \\ \theta_1^2 \\ v_2^2 \\ \theta_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

باجراء عملية التجميع: (carrying out the assembly process)

$$[k] = [C]^t [\tilde{k}][C]$$

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & \left(k_{33}^1 + k_{11}^2\right) & \left(k_{34}^1 + k_{12}^2\right) & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & \left(k_{43}^1 + k_{21}^2\right) & \left(k_{44}^1 + k_{22}^2\right) & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \\ P_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

الشروط الحدودية: (B. conditions)

$$v_1 = \theta_1 = v_3 = 0$$

أحذف الصفوف والأعمدة المناظرة لـ $v_1 = \theta_1 = v_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} \left(k_{33}^1 + k_{11}^2\right) & \left(k_{34}^1 + k_{12}^2\right) & k_{14}^2 \\ \left(k_{43}^1 + k_{11}^2\right) & \left(k_{44}^1 + k_{22}^2\right) & k_{24}^2 \\ k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ M \\ 0 \end{Bmatrix}$$

أخيراً نحصل على،

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 24 & 0 & 6L \\ 0 & 8L^2 & 2L^2 \\ 6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[k]^{-1} = \begin{bmatrix} 7L^2 & 3L & -12L \\ 3L & 15 & -12 \\ -12L & -12 & 48 \end{bmatrix}$$

5.3 مثال (2):

تُعطي مصفوفة الكزازة لعنصر قضيب تحت تأثير الانحناء كالآتي:

$$[k]^e = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^4 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^4 \end{bmatrix}$$

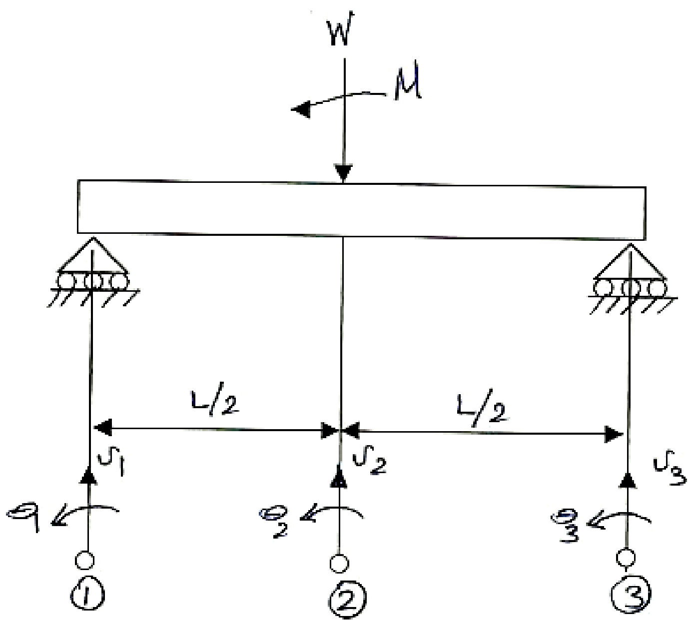
حيث،

E = معاير يونق للمرونة.

I = العزام الثاني للمساحة.

L = طول العنصر.

أوجد الإزاحة القصوى لعارضة مسندة إسناداً بسيطاً تحمل حملاً متمركزاً W عند منتصفها إذا كان طولها L. قارن إجابتك بالحل التحليلي للمسألة.



$$\begin{Bmatrix} v_1^1 \\ \theta_1^1 \\ v_2^1 \\ \theta_2^1 \\ v_1^2 \\ \theta_1^2 \\ v_2^2 \\ \theta_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$[k] = [C]^t [\tilde{k}] [C]$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & (k_{33}^1 + k_{11}^2) & (k_{34}^1 + k_{12}^2) & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & (k_{33}^1 + k_{11}^2) & (k_{34}^1 + k_{12}^2) & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & (k_{43}^1 + k_{21}^2) & (k_{44}^1 + k_{22}^2) & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \\ P_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

الشروط الحدودية: (Boundary conditions)

$$v_1 = v_3 = \theta_2 = 0$$

$$P_1 = \frac{W}{2},\ P_2 = 0,\ P_3 = -\frac{W}{2}$$

$$M_1 = 0,\ M_2 = M,\ M_3 = 0$$

أحذف الأعمدة والصفوف المناظرة للشروط الحدودية عاليه،

$$\begin{bmatrix} k_{22}^{1} & k_{23}^{1} & 0 \\ k_{32}^{1} & \left(k_{33}^{1}+k_{11}^{2}\right) & k_{14}^{2} \\ 0 & k_{41}^{2} & k_{11}^{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{W}{2} \\ M \\ -\frac{W}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 4L^2 & -6L & 0 \\ -6L & 24 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{W}{2} \\ M \\ -\frac{W}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{EI}{L^3}\left[4L^2\theta_1-6Lv_2\right]=\frac{W}{2} \qquad (1)$$

$$\frac{EI}{L^3}\left[-6L^2\theta_1+24v_2+6L\theta_3\right]=\frac{W}{2} \qquad (2)$$

$$\frac{EI}{L^3}\left[6v^2+4L^2\theta_3\right]=-\frac{W}{2} \qquad (3)$$

من المعادلة (1)،

$$\theta_1=\left[\frac{WL^3}{2EI}+6Lv^2\right]\times\frac{1}{4L^2} \qquad (4)$$

من المعادلة (3)،

$$\theta_3=\left[-\frac{WL^3}{2EI}-6Lv^2\right]\times\frac{1}{4L^2} \qquad (5)$$

من المعادلتين (4) و(5)،

$$\theta_1=-\theta_3=\theta$$

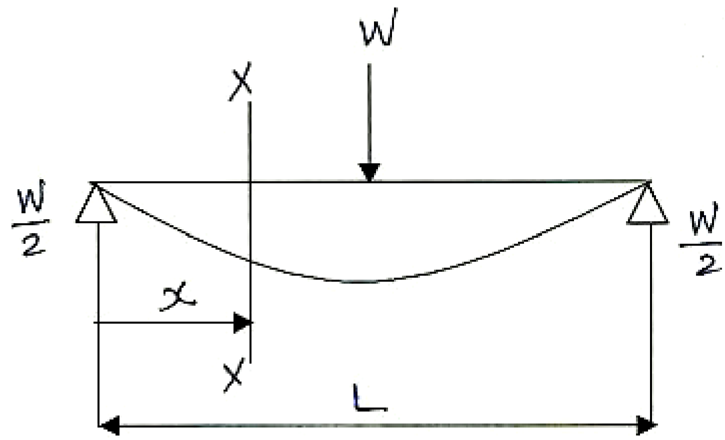
من المعادلة (2)،

$$\frac{EI}{L^3}\left[-6L^2\theta_3+24v_2+6L\theta_3\right]=M$$

$$\frac{EI}{L^3}\left[\text{zero}-12L\theta_3+24v_2\right]=M=\frac{WL}{2}$$

$$24v_2 = \frac{EI}{L^3} = \frac{WL}{2}, \quad \therefore v_2 = \frac{WL^4}{48EI}$$

بالحل التحليلي،



$$-M = \frac{W}{2}x$$

$$M = -EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}Wx$$

بالتكامل،

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}W\frac{x^2}{2} + A = \frac{1}{4}Wx^2 + A \qquad \text{(i)}$$

يمكن إيجاد قيمة ثابت التكامل باستخدام شروط منتصف العارضة عندما $x = \frac{1}{2}L$ فإن

الميل $\frac{dy}{dx}$ يساوي صفر،

$$0 = -\frac{1}{4}W\left(\frac{1}{2}L\right)^2 + A$$

$$\therefore A = \frac{WL^2}{16}$$

عوِّض عن قيمة A في المعادلة (i) وكامل مرة أخرى،

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}Wx^2 + \frac{WL^2}{16}$$

$$EIy = -\frac{Wx^3}{12} + \frac{WL^2x}{16} + B$$

B = 0، بما أنَّ الانحراف y يساوي صفر عند الأصل (عند x = 0)،

الانحراف الأقصى يحدث عند منتصف العارضة $\left(x = \frac{1}{2}L\right)$

$$y_{max} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{W\left(\frac{1}{2}L\right)^3}{12} + \frac{Wl^2\left(\frac{1}{2}L\right)}{16}\right] = \frac{WL^3}{48EI}$$