كتاب التصميم بمساعدة الحاسوب

الفصل الرابع

تحليل الجملونات

(Analysis of Trusses)

تأليف:

د. أسامة محمد المرضي سليمان خيَّال

Dr. Osama Mohammed Elmardi Suleiman Khayal

قسم الهندسة الميكانيكية

كلية الهندسة والتقنية

جامعة وادي النيل

عطبرة، السودان

الطبعة الأولي ديسمبر 1998م

الطبعة الثانية يناير 2019م

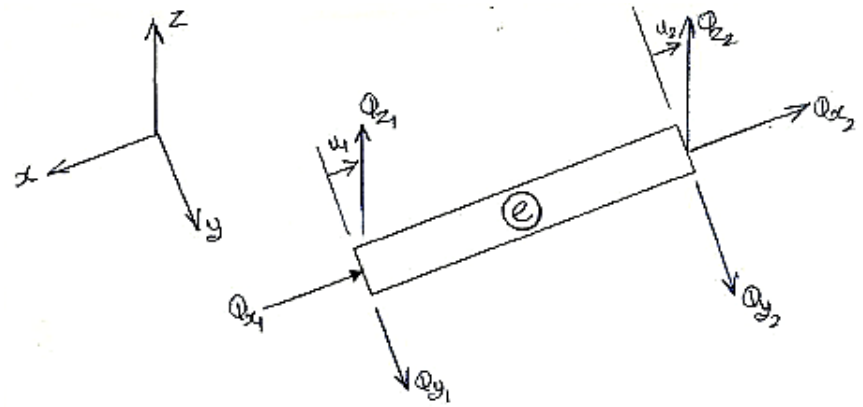
الفصل الرابع

تحليل الجملونات

(Analysis of Trusses)

4.1 العنصر الفراغي للجملون: (Space Truss Element)

اعتبر عنصر الوصلة المسمارية الموضَّح في الشكل (4.1) أدناه:



شكل (4.1)

u_1، u_2 تمثِّل درجات الحرية العقدية في الإحداثيات الموضـــعية للمنظومة. Q_x, Q_y, Q_z تمثِّل الإزاحة الكونية للمنظومة.

عليه،

$$u_1 = L_{12}Q_{x1} + m_{12}Q_{y1} + n_{12}Q_{z1}$$

$$u_2 = L_{12}Q_{x2} + m_{12}Q_{y2} + n_{12}Q_{z2}$$

حيث،

$$L_{12} = \cos\theta_x$$

$$m_{12} = \cos\theta_y$$

$$n_{12} = \cos\theta_z$$

$$\{u\}^e = [C]\{\theta\}$$

حيث،

$$[C]=\begin{bmatrix} L_{12} & m_{12} & n_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{12} & m_{12} & n_{12} \end{bmatrix}$$

وتُسمي بمصفوفة التحويل (transformation matrix).

$$L_{12}=\frac{x_2-x_1}{L}$$

$$m_{12}=\frac{y_2-y_1}{L}$$

$$n_{12}=\frac{z_2-z_1}{L}$$

حيث،

$L=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ ، الطول

متجه الحمل يمكن الحصول عليه من:

$$\{p\}=[C]^t\{p\}$$

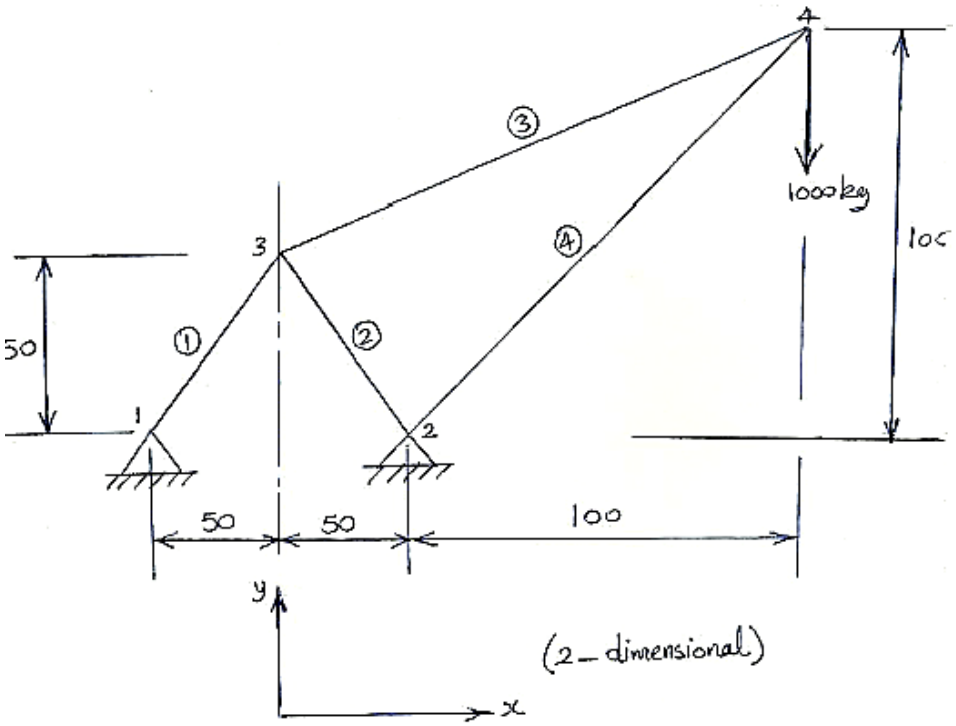
مصفوفة الكزازة هي،

$$[k]=[C]^t[k][C]$$

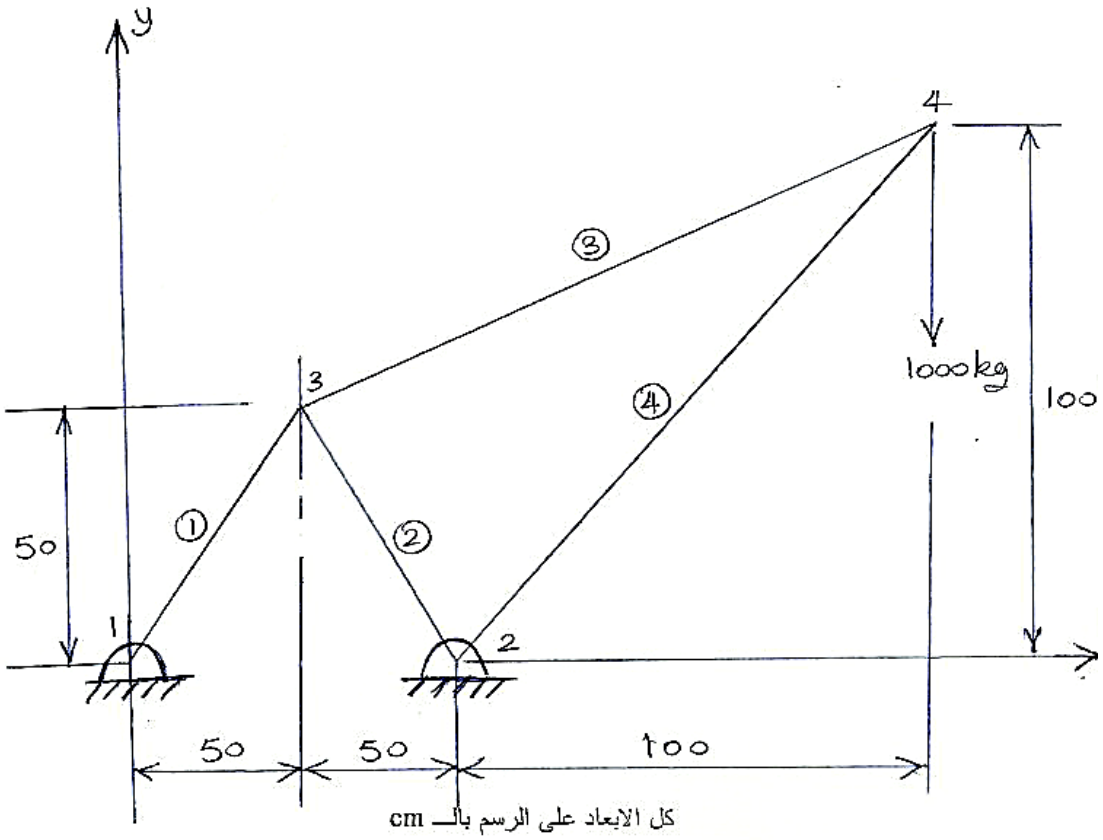
4.2 مثال:

أوجد الإزاحة العقدية والإجهادات الداخلية التي تنشأ في الجملون الموضَّح في الشكل أدناه عندما يتم تطبيق قوة رأســـية إلي أســـفل عند العقدة 4 مقدارها 1000kg. معاير يونق للمرونة يعادل $2\times10^6 kg/cm^2$ ومساحة المقطع العرضي للأجزاء الأربعة كالآتي:

A1	A2	A3	A4
$2cm^2$	$2cm^2$	$1cm^2$	$1cm^2$



كل الابعاد على الرسم بالـ cm



كل الابعاد على الرسم بالـ cm

رقم العنصر أو الجزء	العقدة الكونية المقابلة لـ		x_1	y_1	x_2	y_2	الطول L	جيوب التمام	
	العقدة الموضعية 1	العقدة الموضعية 2						L_{12}	m_{12}
1	1	3	0	0	50	50	$50\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
2	3	2	50	50	100	0	$50\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
3	3	4	50	50	200	100	$50\sqrt{10}$	$\frac{3}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$
4	2	4	100	0	200	100	$100\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

العنصر رقم (1)، الطول L،

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$L = \sqrt{50^2 + 50^2 + 0^2} = \sqrt{5000} = \sqrt{2500 \times 2} = \underline{50\sqrt{2}}$$

العنصر رقم (2)،

$$L = \sqrt{50^2 + (-50^2)} = \underline{50\sqrt{2}}$$

العنصر رقم (3)،

$$L = \sqrt{150^2 + 50^2} = \sqrt{25{,}000} = \sqrt{2500 \times 10} = \underline{50\sqrt{2}}$$

العنصر رقم (4)،

$$L = \sqrt{100^2 + 100^2} = \sqrt{20{,}000} = \sqrt{10{,}000 \times 2} = \underline{100\sqrt{2}}$$

جيوب تمام الاتجاه: (Direction cosines)

العنصر رقم (1)،

$$L_{12} = \frac{x_2 - x_1}{L} = \frac{50}{50\sqrt{2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$m_{12} = \frac{y_2 - y_1}{L} = \frac{50}{50\sqrt{2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

العنصر رقم (2)،

$$L_{12} = \frac{50}{50\sqrt{2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$m_{12} = -\frac{50}{50\sqrt{2}} = \underline{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

العنصر رقم (3)،

$$L_{12} = \frac{150}{50\sqrt{10}} = \underline{\frac{3}{\sqrt{10}}}$$

$$m_{12} = \frac{50}{50\sqrt{10}} = \underline{-\frac{1}{\sqrt{10}}}$$

العنصر رقم (4)،

$$L_{12} = \frac{100}{100\sqrt{2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$m_{12} = \frac{100}{100\sqrt{2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

تحديد مصفوفة الكزازة للعناصر الأربعة:

العنصر رقم (1)،

$$[k]^1 = [C]^t [k]^e [C]$$

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C]^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [k]^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{EA_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\frac{2\times10^6\times2}{50\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= 2\sqrt{2}\times10^4\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\\ -1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= 2\sqrt{2}\times10^4\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix} kg/cm \qquad (1)$$

العنصر رقم (2)،

$$[k]^2 = \frac{EA_2}{L_2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \frac{2\times10^6\times2}{50\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$[C]^t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\therefore [k]^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\frac{2\times10^6\times2}{50\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$= 2\sqrt{2}\times10^4\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$= 2\sqrt{2}\times 10^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} kg/cm \qquad (2)$$

العنصر رقم (3)،

$$[k]^e = \frac{EA_3}{L_3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2\times 10^6 \times 1}{50\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2\sqrt{10}}{5}\times 10^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad [C]^t = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [k]^3 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{2\sqrt{10}}{5}\times 10^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 4\sqrt{10}\times 10^2 \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \\ -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 4\sqrt{10}\times 10^2 \begin{bmatrix} 9 & 3 & -9 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ -9 & -3 & 9 & 3 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} kg/cm \qquad (3)$$

العنصر رقم (4)،

$$[k]^4 = \frac{EA_4}{L_4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2\times 10^6 \times 1}{100\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{2}\times 10^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [C]^t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [k]^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\sqrt{2}\times 10^4\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore [k]^4 = 4\sqrt{2}\times 10^2\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix} kg/cm \qquad (4)$$

للانسجام بين العناصر المتجاورة: (For compatibility)

$$\{u\}^e = [C]\{Q\}$$

$$\begin{Bmatrix}u^1x_1\\ u^1y_1\\ u^1x_2\\ u^1y_2\\ u^2x_1\\ u^2y_1\\ u^2x_2\\ u^2y_2\\ u^3x_1\\ u^3y_1\\ u^3x_2\\ u^3y_2\\ u^4x_1\\ u^4y_1\\ u^4x_2\\ u^4y_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Qx_1\\ \\ Qy_1\\ \\ Qx_2\\ \\ Qy_2\\ \\ Qx_3\\ \\ Qy_3\\ \\ Qx_4\\ \\ Qy_4\\ \end{Bmatrix}$$

مصفوفة الكزازة الكلية يمكن إعطاؤها كالآتي:

$$[k] = [C]^t[\tilde{k}][C]$$

$$[\tilde{k}] = \begin{bmatrix}[k]^1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & [k]^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & [k]^3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & [k]^4\end{bmatrix}$$

$$\left[\tilde{k}\right]=\begin{bmatrix}
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{-9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{1}{10\sqrt{5}} & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-1}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-9}{10\sqrt{5}} & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-1}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{1}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}
\end{bmatrix}$$

$$\therefore \left[k\right]=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{-9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{1}{10\sqrt{5}} & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-1}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-9}{10\sqrt{5}} & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-1}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{1}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}
\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}=$$

$$2\sqrt{2}\times10^4\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & -1 & 1 & \frac{20\sqrt{5}+9}{10\sqrt{5}} & \frac{7.5\sqrt{5}+3}{10\sqrt{5}} & 0 & 0\\
-1 & -1 & 1 & -1 & \frac{7.5\sqrt{5}+3}{10\sqrt{5}} & \frac{22.5\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}} & \frac{-2.5\sqrt{5}-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-2.5\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2.5\sqrt{5}-9}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2.5\sqrt{5}-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-2.5\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}} & \frac{-2.5\sqrt{5}+3}{10\sqrt{5}} & \frac{2.5\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}}
\end{bmatrix}$$

للاتزان: (For equilibrium)

$$[k]\{u\}=\{P\}$$

$$2\sqrt{2}\times10^4\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & -1 & 1 & \frac{9+20\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{3+7.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & 0 & 0\\
-1 & -1 & 1 & -1 & \frac{3+7.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{1+22.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{-3-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{-1-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-9-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{-1-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{3+2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{1+2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}
\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_3\\u_3\\u_2\\u_3\\u_4\\u_2\\u_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}Px_1\\Py_1\\Px_2\\Py_2\\Px_3\\Py_3\\Px_4\\Py_4\end{Bmatrix}$$

الشروط الحدودية: (Boundary conditions)

$$u_1=0,\quad u_2=0$$

$$Py_4=1000kg,\quad Px_4=0$$

$$2\sqrt{2}\times10^4(u_3-u_3-u_4)=Px_1$$

$$\therefore Px_1=-2\sqrt{2}\times10^4u_4 \qquad (1)$$

$$2\sqrt{2}\times10^4(u_3-u_3-u_4)=Py_1$$

$$\therefore Py_1=-2\sqrt{2}\times10^4u_4 \qquad (2)$$

$$2\sqrt{2}\times10^4(-u_3+u_3)=Px_2$$

$$\therefore Px_2=0 \qquad (3)$$

$$2\sqrt{2}\times10^4(-u_3+u_3)=Py_2$$

$$\therefore Py_2 = 0 \qquad (4)$$

$$2\sqrt{2}\times 10^4\left(-u_3 - u_3 + \left(\frac{9+20\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_3 + \left(\frac{3+7.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_4\right) = Px_3 \quad (5)$$

$$2\sqrt{2}\times 10^4\left(-u_3 + u_3 + \left(\frac{3+7.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_3 + \left(\frac{1+22.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_4 + \left(\frac{-1-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_4\right) = Py_3 (6)$$

$$2\sqrt{2}\times 10^4\left(\frac{-9-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_3 = Px_4 \qquad (7)$$

$$2\sqrt{2}\times 10^4\left(\frac{-3-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_3 + \left(\frac{-1+2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_4 + \left(\frac{1+2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_4 = Py_4 \qquad (8)$$

من المعادلة (8)،

$$2\sqrt{2}\times 10^4\left(\frac{-3-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_3 = 100$$

$$\therefore u_3 = \frac{1000}{2\sqrt{2}\times 10^4}\times\frac{10\sqrt{5}}{-3-2.5\sqrt{5}}$$

$$= \underline{\underline{-0.09203}}cm$$

الكتب والمراجع

الكتب والمراجع العربية:

1. د. أسامة محمد المرضي سليمان ، "مذكرة محاضرات التصميم بمساعدة الحاسوب" ، جامعة وادي النيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، ديسمبر 1998م.

2. بروفيسور محمود يس عثمان، "مذكرة محاضرات أسلوب العناصر المحددة (F.E.M) في حل مسائل ميكانيكا المصمتات" ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، مارس 1990م.

الكتب والمراجع الإنجليزية

1. Alexandre Ern, Jean – Luc Guermond, "Theory and practice of finite elements", springer, New York, (2008), ISBN 0-387-20574-8.
2. Patricia L. Smith, Tillman J. Ragan, "Instructional design 3rd edition", (2004).
3. Narayan K. Lalit, "Computer aided design and manufacturing", New Delhi, Prentice Hall of India, (2008).
4. Daryl L. Lohan, "A first course in the finite element method", Cengage learning, (2011), ISBN 978 – 0495668251.
5. Ready J. N., "An introduction to finite element method 3rd edition", McGraw-Hill, (2006), ISBN 9780071267618.
6. Strang Gilbert, Fix George, "An analysis of the finite element method", Prentice Hall, (1973), ISBN 0 – 13 – 032946 – 0.
7. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z., "The finite element method: its basis and fundamentals sixth edition", Butterworth – Heinemann, (2005), ISBN 0750663200.

8. Bathe K. J., "Finite element procedures", Cambridge, (2006), ISBN 097900490X.
9. Smith I.M., Griffiths D. V., Margetts L., "Programming the finite element method fifth edition", Wiley, ISBN 978 – 1 – 119 – 97334 – 8.
10. Arregui Mena J. D., Margetts L., et al., "Practical application of the stochastic finite element method", Archives of computational methods in engineering, 23(1), PP. (171 – 190), (2014).
11. Arregui Mena J. D., et al., "Characterization of the spatial variability of material properties of gilso carbon and NBG – 18 using random fields", Journal of nuclear materials, 511, PP. (91 – 108), (2018).
12. Osama Mohammed Elmardi Suleiman, " lecture notes on computer aided design using finite element method ", Nile valley university, faculty of engineering and technology, department of mechanical engineering, (2002).
13. Osama Mohammed Elmardi Suleiman, " lecture notes on computer aided design using dynamic relaxation method coupled with finite differences ", Nile valley university, faculty of engineering and technology, department of mechanical engineering, (2002).

نبذة عن المؤلف:

أسامة محمد المرضي سليمان وُلِدَ بمدينة عطبرة بالسودان في العام 1966م. حاز على دبلوم هندسة ميكانيكية من كلية الهندسة الميكانيكية – عطبرة في العام 1990م. تحصَّل أيضاً على درجة البكالوريوس في الهندسة الميكانيكية من جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا – الخرطوم في العام 1998م ، كما حاز على درجة الماجستير في تخصص ميكانيكا المواد من جامعة وادي النيل – عطبرة في العام 2003م ودرجة الدكتوراه من جامعة وادي النيل في العام 2017م. قام بالتدريس في العديد من الجامعات داخل السودان، بالإضافة لتأليفه لأكثر من ثلاثين كتاباً باللغة العربية ولعشرة كتب باللغة الإنجليزية بالإضافة لخمسين ورقة علمية منشورة في دور نشر ومجلات عالمية إلى جانب إشرافه على أكثر من ثلاثمائة بحث تخرج لكل من طلاب الماجستير، الدبلوم العالي، البكالوريوس، والدبلوم العام. يشغِل الآن وظيفة أستاذ مساعد بقسم الميكانيكا بكلية الهندسة والتقنية – جامعة وادي النيل. بالإضافة لعمله كاستشاري لبعض الورش الهندسية بالمنطقة الصناعية عطبرة. هذا بجانب عمله كمدير فني لمجموعة ورش الكمالي الهندسية لخراطة أعمدة المرافق واسطوانات السيارات والخراطة العامة وكبس خراطيش الهيدروليك.