الفصل الأول

الاهتزاز (Vibration)

1.1 مدخل:

الاهتزاز هو حركة الجسم التأرجحية حول موضع الاتزان. كل الأجسام التي تحتوى على كتلة ومرونة لها استعداد طبيعي للاهتزاز. ولهذا فإن معظم الآلات والإنشاءات الهندسية تتعرض للاهتزاز لدرجة ما، وهو ما يجب أن يؤخذ في الاعتبار في مرحلة تصميم هذه الآلات والإنشاءات.

هنالك نوعان من الاهتزاز: حر وقسري.

الاهتزاز الحر يحدث عندما يتأرجح الجسم تحت تأثير القوى الكامنة في الجهاز نفسه، وفى غياب القوى الخارجية. والأجهزة تهتز بذبذبة طبيعية واحدة أو اكثر. والذبذبة الطبيعية من الخواص الديناميكية للجهاز تحددها كتلة الجهاز ومقدار الكزازة فيه.

الاهتزاز الذي يحدث تحت تأثير قوى الإثارة الخارجية يسمى اهتزاز قسري. عندما تكون الإثارة تأرجحية، فان الجهاز يكون محكوماً للاهتزاز بذبذبة الإثارة. وإذا تعادلت ذبذبة الإثارة مع الذبذبة الطبيعية للجهاز، يصبح الجهاز في حالة تعرف بالرنين مما قد يؤدى إلى نشوء تأرجحات كبيرة.

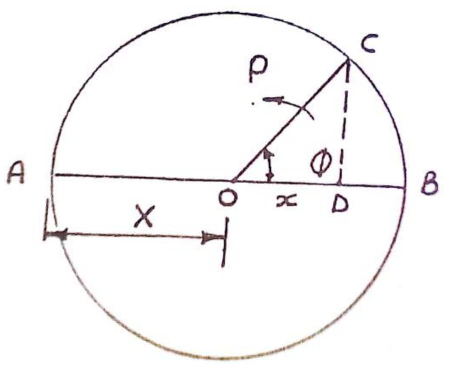
إن انهيار الإنشاءات الكبيرة مثل الكباري والعمارات، أو أجنحة الطائرات يمكن أن يكون نتيجة للرنين. ولهذا السبب فإن حساب الذبذبات الطبيعية ذات أهمية قصوى لدراسة الاهتزاز.

كل الأجهزة تحتوى على قدر كبير من المضاءلة أو التخميد لأن الطاقة تتبدَّد بواسطة الاحتكاك ومقاومات أخرى. إذا كانت المضاءلة منخفضة، فإن تأثيرها على الذبذبات الطبيعية يكون ضعيفاً. ولهذا فإن حساب الذبذبات الطبيعية يقوم على افتراض عدم وجود مضاءلة. ومن جانب آخر فإن المضاءلة لها أهمية كبيرة في تقليص سعة الحركة عند الرنين.

عدد الإحداثيات المستقلة المطلوبة لتحديد هيئة الجهاز تسمى درجات الحرية ولهذا فإن جسيم حر يقوم بحركة في الفضاء سيكون له ثلاث درجات من الحرية، بينما الجسم الجاسئ سيكون لـه ستة درجات من الحرية تتطلبها ثلاث إزاحات خطية ومثلها زاوية. أما الجسم المرن المستمر فإنَّه يحتاج إلى عدد لإنهائي من درجات الحرية لتحديد هيئته (ثلاثة لكل نقطة على الجسم). ولكن كثير من الأجهزة في مسائل الاهتزاز يمكن تبسيطها بأجهزة ذات درجة واحدة من الحرية بدون أن يؤدى ذلك التبسيط إلى تدنى في الدقة .

1.2 الحركة التوافقية :

يوصف جسم بأنَّ حركته توافقية إذا كانت عجلته في تناسب مع إزاحته من نقطة ثابتة وتكون دائماً متجهة نحو تلك النقطة. هب أن الخط OC وطوله X يدور حول النقطة الثابتة O بسرعة زاوية ثابتة P كما في الرسم أدناه.



إذا قيس الزمن من الموضعOB ، فإن زاوية دوران OC في زمن مقداره t سيكون : $\phi = pt$

إذا كانت D هي مسقط C على القطر AB ، فإن إزاحة D من موضع الوسط $x = X\cos pt$

الإزاحة القصوى X تسمى سعة الحركة. وفى هذه الحالة تكون السرعة والعجلة كما يلي:

$$\dot{x} = -pX\sin pt$$

$$\dot{x} = -p^2 X\cos pt = -p^2 x$$

وهكذا فإن عجلة D في تناسب مع الإزاحة x من نقطة ثابتة O ودائماً تتجه نحو تلك النقطة ولهذا فإن حركة D حركة توافقية بسيطة. أي أن معادلة الحركة التوافقية،

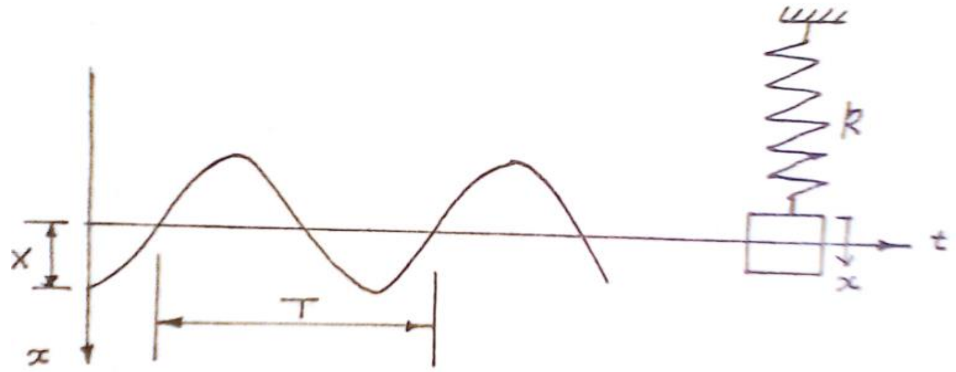
$$\ddot{x} + px^2 = O \qquad (1)$$

الزمن الدوري T هو الزمن الذي تحتاج إليه C لإكمال لفة واحدة

$$T = \frac{2\pi}{p}(s)$$

والذبذبة بالـ Hz (دورة في الثانية) $f = \frac{1}{T} = \frac{p}{2\pi}$

إن أبسط أنواع الحركة الدورية هي الحركة التوافقية والتي يمثلها كتلة معلقة من ياي خفيف كما موضَّح في الرسم أدناه .



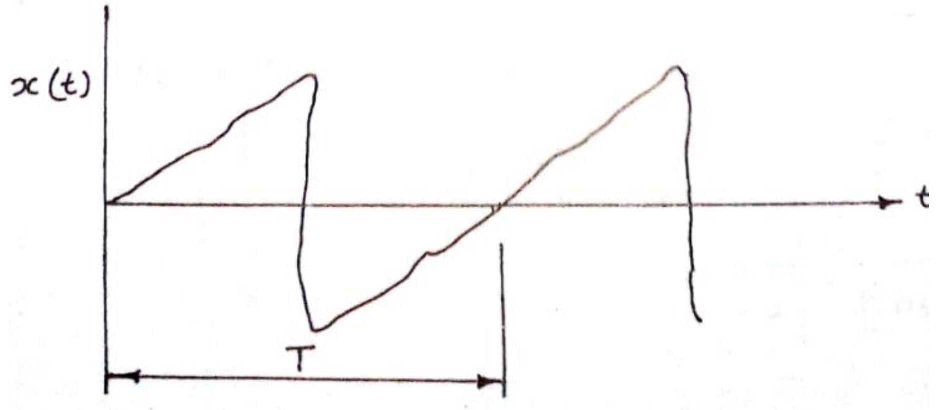
إذا أزيحت الكتلة من موضع الاتزان ثم أطلقت، فإنها تتأرجح إلى أعلا وأسفل، وتكون الحركة كما مبيَّن في الرسم

$.x = X \cos pt$

1.3 الحركة الدورية :

كثيراً ما يحدث الاهتزاز بذبذبات عديدة في نفس الوقت. فمثلاً اهتزاز وتر العود أو الكمان يحتوى على الذبذبة الأساسية f_1 بالإضافة الى الذبذبات الأعلى f_2 , f_3 وهكذا. مثال آخر اهتزاز جهاز

متعدد درجات الحرية يمكن أن تساهم فيه عدد من الذبذبات الطبيعية مما يؤدى إلى موجة متكررة مركبة من عدد من الموجات كما موضّح في الرسم أدناه .



الفصل الثاني

الاهتزاز الحر بدون مضاءلة

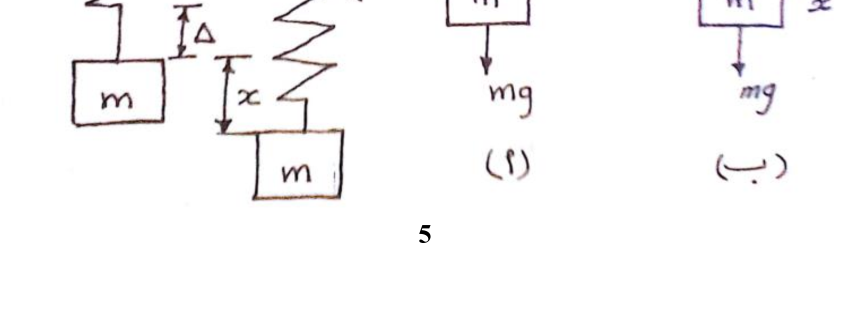
2.1 مدخل:

كما ذكرنا آنفا أنَّ جميع الأجهزة التي تحتوى على كتلة ومرونة لها استعداد طبيعي للاهتزاز الحر، أي أنَّ الاهتزاز في غياب قوة الإثارة أو الاضطراب الخارجية. والاهتمام الأولى بهذه الأجهزة ينصب على الذبذبة الطبيعية ومهمتنا الآن هي تعلم كتابة معادلة الحركة وحساب الذبذبة الطبيعية والتي هي أصلاً بدلالة الكتلة و الكزازة.

المضاءلة بنسب معقولة لا تأثير لها على الذبذبة الطبيعية ويمكن تجاهلها في الحساب. وعلى هذا الأساس يمكن اعتبار الجهاز جهازاً محافظاً وعليه فإنَّ مبدأ المحافظة على الطاقة يمثل طريقة بديلة لحساب الذبذبة الطبيعية. والأثر المترتب على المضاءلة هو تناقص سعة الحركة مع مرور الزمن.

2.2 معادلة الحركة –الذبذبة الطبيعية:-

أبسط أنواع الأجهزة القابلة للاهتزاز يتكون من كتلة (m) معلقة على ياي. كتلة الياي يمكن تجاهلها، وثابت الياي k(N/m) . هذا الجهاز له درجة واحدة من الحرية لأن هيئته يمكن تحديدها بإحداثية واحدة x . أنظر الرسم.



معادلة الحركة للجسم يمكن صياغتها هكذا: ناتج القوى في اتجاه العجلة يساوى حاصل ضرب الكتلة في العجلة. وبالتالي معادلة الحركة للأجسام في الرسم (أ) و(ب) هكذا على التوالي:

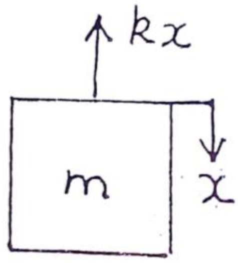
$$mg - k\Delta = 0 \qquad (2)$$

$$mg - k(\Delta + x) = m\ddot{x} \qquad (3)$$

من المعادلة (2) و(3) نحصل على،

$$-kx = m\ddot{x}$$

نلاحظ أنَّ اختيار موضع الاتزان الاستاتيكى كمرجع للإحداثية x أدى إلى التخلص من mg. وبالطبع من الأفضل استنتاج معادلة الحركة مباشرة من مخطَّط الجسم الحر بدون mg كما في الرسم أدناه.



$$-kx = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = O \qquad (4)$$

وبمقارنة المعادلتين (1) و(4)، يتضح أنَّ الذبذبة الدائرية للجهاز،

$$P = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

مثال(1):

كتلة 0.25kg معلقة من طرف ياي له ثابت 150N/m. أحسب الذبذبة الطبيعية والزمن الدوري.

الحل:

الذبذبة الطبيعية :

$$P = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{150}{0.25}} = \underline{24.5}\,rad/s$$

الزمن الدوري :

$$T = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{24.5} = \underline{0.26}s$$

مثال(2):

أوجد الذبذبة الطبيعية لكتلة M على طرف عارضة وتدية كما موضَّح في الرسم أدناه . تجاهل كتلة العارضة .

الحل:

انحراف العارضة الوتدية تحت تأثير حمل مركز F عند الطرف

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}\overset{3}{\mathbf{L}}}{\mathbf{3EI}} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{k}}$$

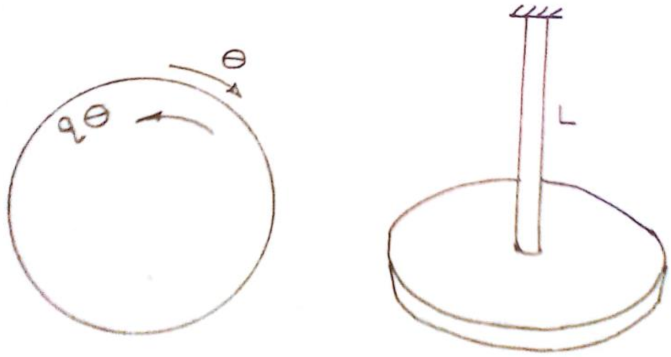
$$\therefore k = \frac{3EI}{L^3}$$

الذبذبة الطبيعية :

$$P = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{3EI}{ML^3}}$$

مثال(3):

عجل سيارة معلق بواسطة قضيب من الصلب قطره 5mm وطوله 2m كما موضَّح في الرسم عند منح العجل إزاحة زاوية وإطلاقه، أكمل 10 دورات في 30.2s .أوجد عزم القصور الذاتي للعجل حول محور الدوران $G= 80\ kN/mm^2$.



الحل:

$$d=5mm\ ,\quad L=2m,\qquad T_p = \frac{30.2}{10} = 3.02s$$

العزم القطبي

$$J = \frac{\pi}{32} \times 5^4 = 61.4mm^4$$

الذبذبة الطبيعية

$$p = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{3.02} = \underline{2.081}\ rad/s$$

ثابت العمود(q) :

$$q = \frac{T}{\theta} = \frac{GJ}{L} = \frac{80.10^3 \times 61.4}{2.10^3} = \underline{2.456}\ Nm/rad$$

معادلة الحركة :

مجموع العزوم حول محور الدوران في اتجاه العجلة يساوى حاصل ضرب عزم القصور الذاتي في العجلة الزاوية.

$$-q\theta = I\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{q}{I}\theta = 0$$

$$p^2 = \frac{q}{I}$$

$$I = \frac{q}{p^2} = \frac{2.456}{2.081^2} = \underline{0.567}\ kgm^2$$

2.3 طريقة الطاقة :

في الأنظمة المحافظة، يكون مجمل الطاقة ثابت. ويمكن استنتاج معادلة الحركة من مبدأ بقاء الطاقة في حالة الاهتزاز الحر في الأجهزة الخالية من المضاءلة. والطاقة المعنية هنا أما طاقة حركة أو طاقة وضع أو طاقة انفعال. طاقة الحركة T وتكون مخزونة في الكتلة نتيجة للسرعة، بينما طاقة الوضع U تكون مخزونة على شكل طاقة انفعال في جسم مرن أو شغل في مجال الجاذبية الأرضية. ولأنَّ الطاقة الكلية ثابتة فإن معدل التغيير فيها يساوى صفراً .

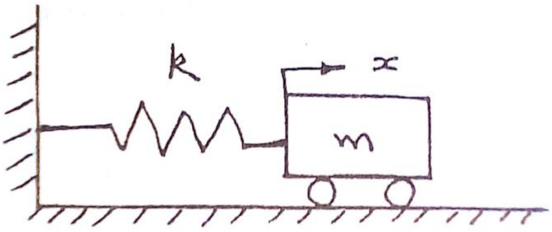
$$T + U = C$$

حيث ان C ثابت

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

مثال(4):

استخدم طريقة الطاقة لاستنتاج معادلة الحركة للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه.



طاقة الحركة :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

طاقة الانفعال :

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$

الطاقة الكلية :

$$T + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

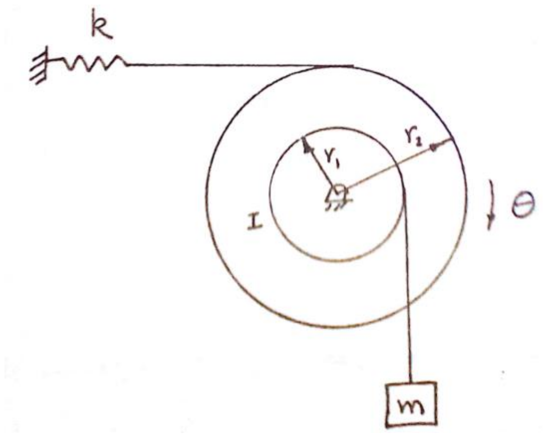
$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

$$\therefore m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = 0$$

$$m \ddot{x} + k x = 0$$

مثال(5):

أوجد الذبذبة الطبيعية للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه.



الحل:

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \left(r_1 \dot{\theta} \right)^2$$

$$U = \frac{1}{2} k \left(r_2 \theta \right)^2$$

$$T + U = \frac{1}{2} \left(I + m r_1^{\,2} \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k r_2^{\,2} \theta^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(T + U \right) = 0$$

$$\left(I + m r_1^{\,2} \right) \dot{\theta} \ddot{\theta} + k r_2^{\,2} \theta \dot{\theta} = 0$$

معادلة الحركة :

$$\ddot{\theta} + \frac{k r_2^2}{I + m r_1^2} \theta = 0$$

$$\therefore p = \sqrt{\frac{k r_2^2}{I + m r_1^2}}$$

2.4 تمرين:

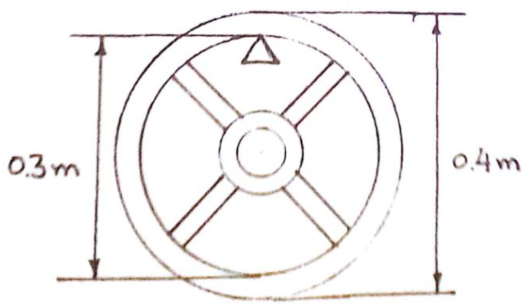
1. كتلة 0.5kg تتصل بياي خفيف الوزن تجعله يستطيل8mm .أوجد الذبذبة الطبيعية للجهاز.

Ans. (35rad/s)

2. كتلة 4.5kg تتصل بالطرف الأسفل للياى بينما طرفه الأعلى مثبت، تهتز بزمن دوري 0.45s، أوجد الزمن الدوري عندما تتصل كتلة 2.3kg عند نقطة في وسط نفس الياى بينما طرفاه مثبتان.

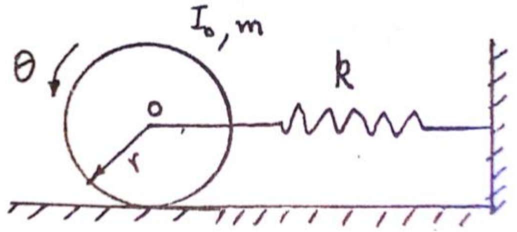
Ans. (1.16s)

3. حداف كتلته 31.5kg يتأرجح كرقاص حول حد سكين موضوع على الحافة الداخلية للشفة كما موضَّح في الرسم ادناه. إذا كان الزمن الدوري 1.22s، أوجد عزم القصور الذاتي للحداف حول محوره الهندسي.



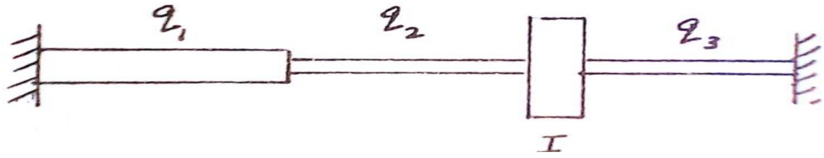
Ans. (1.04kgm^2)

4. أسطوانة كتلتها m وعزم قصور ذاتي I_o تتدحرج بدون انزلاق ولكنها محكومة بالياي k كما موضَّح في الرسم أدناه . أوجد الذبذبة الطبيعية للجهاز.



Ans. $\left(p = \sqrt{\dfrac{kr^2}{I_o + mr^2}} \right)$

5. أوجد الذبذبة الطبيعية للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه وهو عبارة عن عمود متدرج يحمل قرصاً.

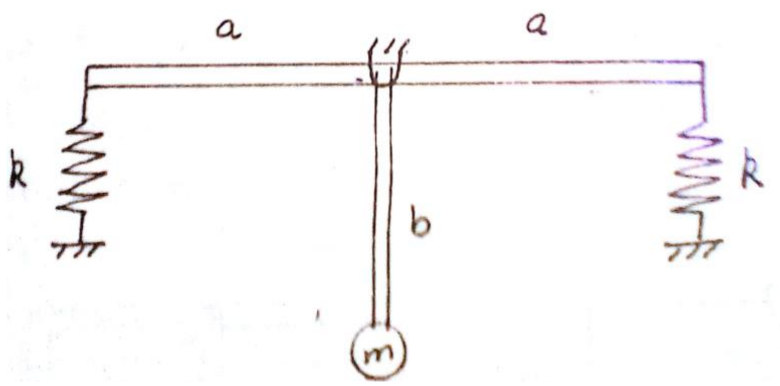


Ans. $\left(p = \sqrt{\frac{q}{I}} \quad , q = \frac{q_1 q_2}{q_1 + q_2} + q_2 \right)$

6. أكتب معادلة الحركة للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه ومن ثم أوجد الذبذبة الطبيعية للجهاز.

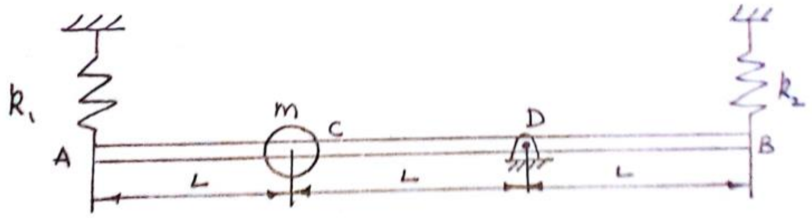
Ans. $\left(p = \sqrt{\frac{3k}{M + 6m}} \right)$

7 . أوجد الذبذبة الطبيعية للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه.



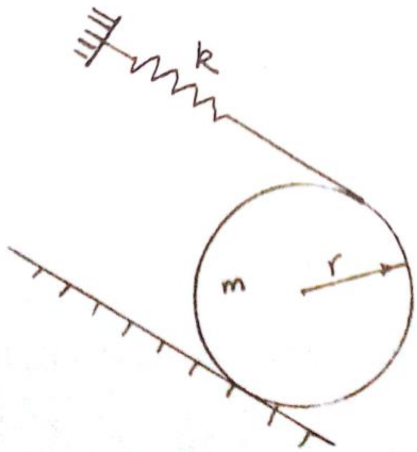
Ans. $\left(f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgb + 2a^2 k}{mb^2}} \right)$

8. القضيب AB منتظم كتلته M=36kg . كتلة الجسم المثبَّت على القضيب m=15kg أحسب ذبذبة الاهتزازات الصغيرة . تجاهل الاحتكاك عند المفصلة. خذ k_1=1.5kN/m ،k_2=3kN/m L=205mm .



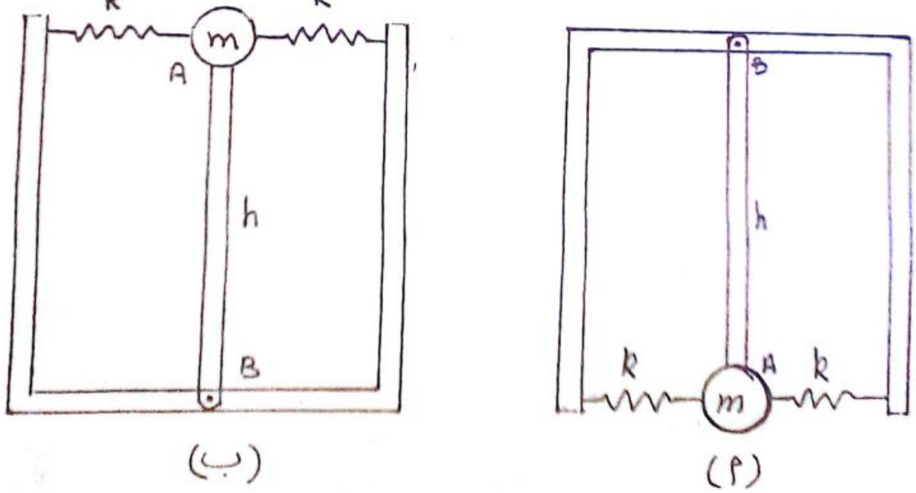
Ans. (2.1Hz)

9. الأسطوانة الموضَّحة في الرسم أدناه تهتز على افتراض أنَّها تدحرجت على المستوى المائل، أوجد الزمن الدوري. المعطيات : k=2.6kN/m ، m=90kg ، r=100mm.

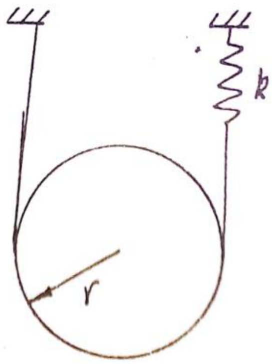


Ans. (0.71s)

10. كتلة 36kg تتصل بقضيب AB ويايين كما موضَّح في الرسم أدناه. إذا كانت h=750mm، أوجد الزمن الدوري للاهتزاز الناجم من إزاحة صغيرة للكتلة. تجاهل كتلة القضيب. k=500N/m



11. أسطوانة كتلتها m ونصف قطرها r معلقة من حبل ملفوف حولها كما مبيَّن في الرسم أدناه أحد طرفي الحبل مربوط إلى مسند جاسئ بينما الطرف الآخر يتصل بياى له ثابت k أوجد الزمن الدوري وذبذبة الاهتزاز إذا منحت الأسطوانة إزاحة زاوية صغيرة ثم أطلقت تجاهل الطاقة الوضعية للأسطوانة.



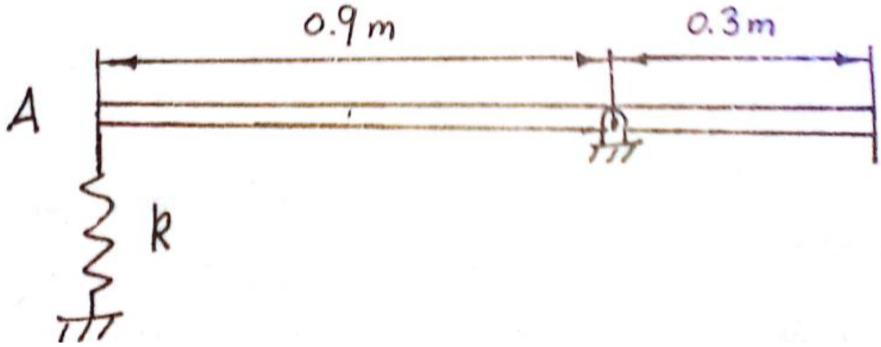
$$\text{Ans.}\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{8k}} \qquad , \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8k}{3m}} \right)$$

12. قرص دائرى كتلته 9kg ونصف قطره 200mm معلَّق بواسطة سلك كما موضَّح في الرسم أدناه عندما أزيح القرص ثم أطلق وُجد ان الزمن الدوري للاهتزاز 1.13s . بعد ذلك تم تعليق ترس بواسطة نفس السلك ووجد ان الزمن الدوري للاهتزاز 1.93s . أوجد (أ) ثابت الالتواء للسلك

(ب) عزم القصور الذاتي للترس حول محور الدوران (ج) أقصى سرعة زاوية للترس إذا أزيح عبر 90 درجة ثم أُطلق .افترض أنَّ ثابت الياى يتناسب مع زاوية الالتواء.

Ans. (q=5.56Nm/rad , I=0.524kgm^2, $\dot{\theta} = 5.12 rad/s$)

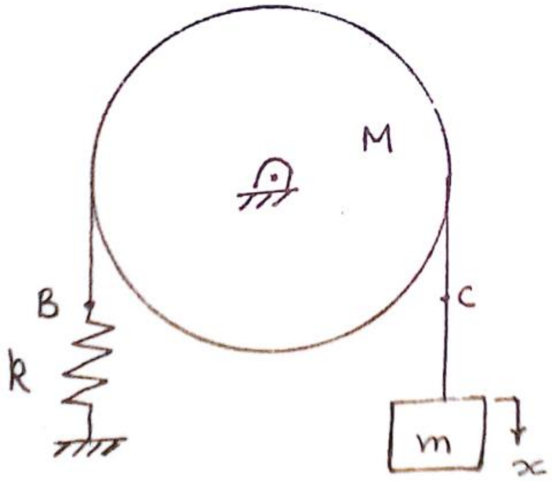
13. قضيب منتظم كتلته 4.5kg يتصل بياى له ثابت k=500N/m كما موضَّح في الرسم، إذا ضغط الطرف A إلى أسفل مسافة 38mm ثم أطلق، أوجد (أ) الزمن الدوري للاهتزاز (ب) السرعة القصوى للطرف A .



Ans.$\left(T = 0.304s \ , \ \dot{x} = 0.787 m/s\right)$

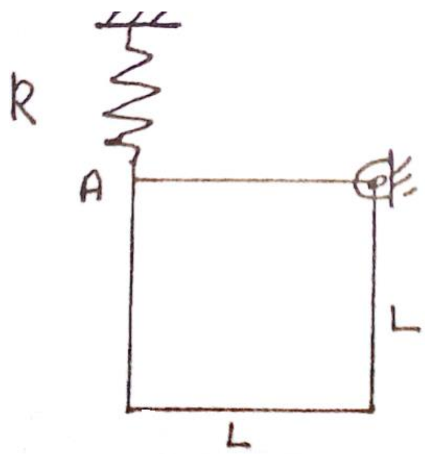
14. حبل ملفوف حول قرص كتلته 15kg كما في الرسم. أحد طرفي الحبل يتصل بياى ثابتةk=600N/m ، والطرف الأخر يتصل بأسطوانة كتلتها 5kg. إذا أُزيحت الأسطوانة 50mm إلى اسفل من موضع الاتزان ثم أطلقت، أوجد (أ) الزمن الدوري للاهتزاز (ب) السرعة القصوى

للأسطوانة. افترض أنَّ الاحتكاك كافٍ لمنع انزلاق الحبل على القرص (ج) ذبذبة الاهتزاز (د) قوة الشد القصوى في الحبل عند النقطتين B,C. نصف قطر الاسطوانة r=150mm .



Ans. (T=0.097s , x=0.347m/s , f=1.1Hz , $F_B=F_C$=61.1N)

15. لوح مربع منتظم كتلته m محمول في مستوى رأسي بواسطة مسمار عند الركن B ويتصل الركن A بياى له ثابت k. إذا منح الركن A إزاحة صغيرة ثم أطلق، أوجد الزمن الدوري للحركة .



Ans. $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}$

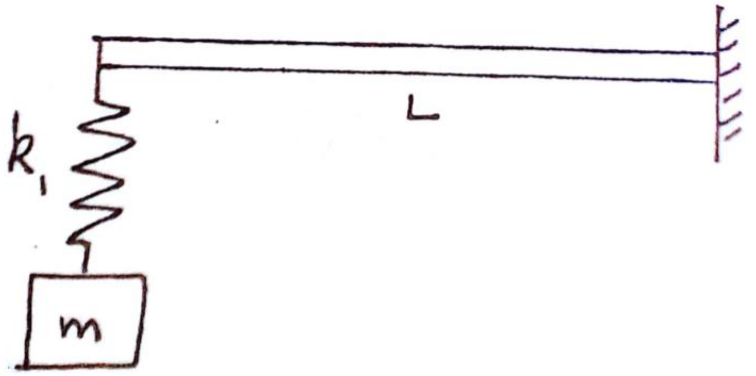
16. قرص منتظم نصف قطره 200mm وكتلته 8kg يتصل بعمود رأسي مثبت بجساءة عند الطرف الأخر. إذا سُلط عزم 4Nm على القرص، فإنَّه يدور عبر 3 درجة. إذا أُدير القرص عبر 6 درجة ثم أطلق، أوجد (أ) الزمن الدوري للاهتزاز (ب) سرعة نقطة على شفة القرص .

Ans. (T=0.288s , v =0.459m/s)

17. جهاز يتكون من كتلة m تتصل بالطرف الحر لعارضة وتدية بواسطة ياي k_1 (انظر الرسم).

طـول العارضـة L=320mm . المقطـع مسـتطيل عرضـه 17mm وعمقـه6mm معـاير المرونـة

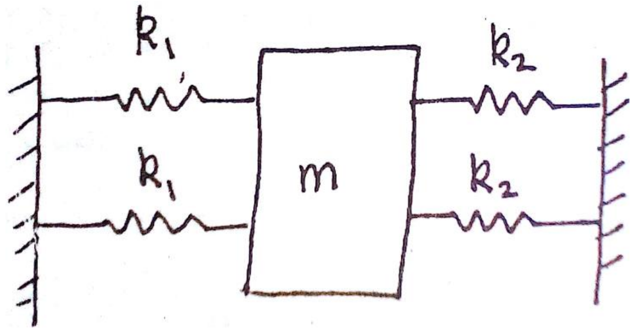
$E=200kN/mm^2$. أوجد الذبذبة الطبيعية للجهاز إذا كان , m=15kg ، k_1=10kN/m.



Ans. (f=2.46Hz)

18. كتلـة 30kg تتصـل بأربعـة يايـات كمـا فـي الرسـم أدنـاه. إذا كـانk_1=42kN/m ,

k_2=18kN/m ، أوجد الذبذبة الطبيعية .

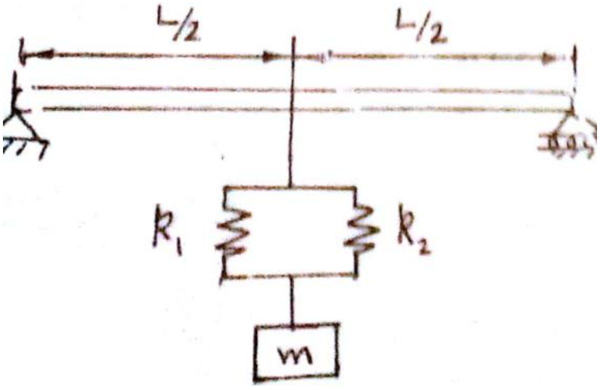


Ans. (f=10.1Hz)

19. أوجد الذبذبة الطبيعية للجهاز الموضح في الرسم أدناه. العارضة مسنودة إسناد بسيط وطولها

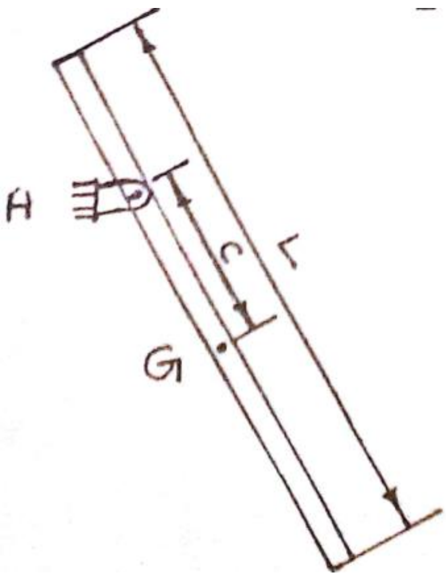
L=600mm . المقطـــع مســـتطيل عرضـــه 25mm وعمقـــه 12.5mm معـــاير المرونـــة

$E=200kN/mm^2$ ، k_1=8kN/m , k_2=6kN/m . الكتلة m=18kg . تجاهل كتلة العارضة.



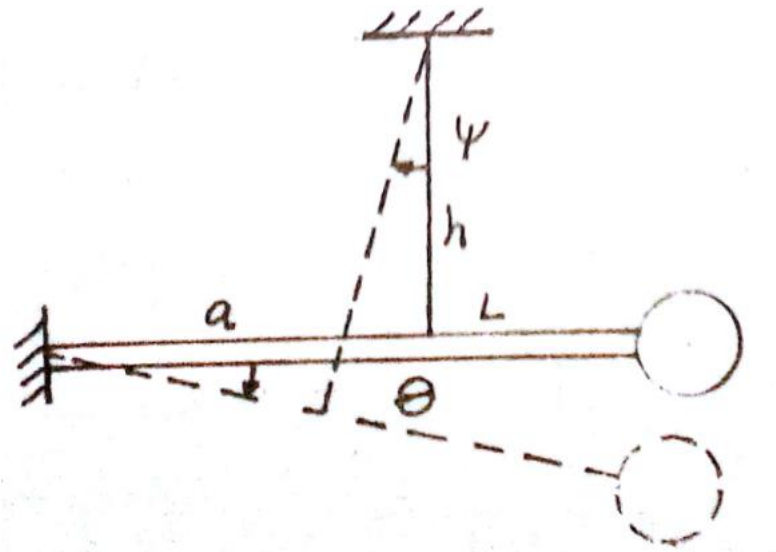
Ans.(f=4.3Hz)

20. قضيب منتظم طوله L يمكن ان يتأرجح حول المفصلة A على مسافة C من مركز الكتلة G ،أوجد (أ) الذبذبة إذا كان $C = \frac{L}{2}$ ، (ب) قيمة C التي تعطى ذبذبة مساوية للذبذبة في (أ).



$$\text{Ans.}\left(f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2L}} \quad , \quad C = \frac{L}{6} \right)$$

21. استنتج معادلة الحركة ثم أوجد الذبذبة الطبيعية للجهاز الموضَّح في الرسم . القضيب الذي طوله L جاسئ ويمكن تجاهل كتلته. هذا القضيب مشدود بسلك غير قابل للاستطالة طوله h في موضع الاتزان يكون السلك راسياً.



Ans. $\left(\ddot{\theta} + \frac{ga}{hL}\theta = 0,\ fn = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ga}{hL}} \right)$

الفصل الثالث

أجهزة ذات درجتين من الحرية

(Second Degree of Freedom Devices)

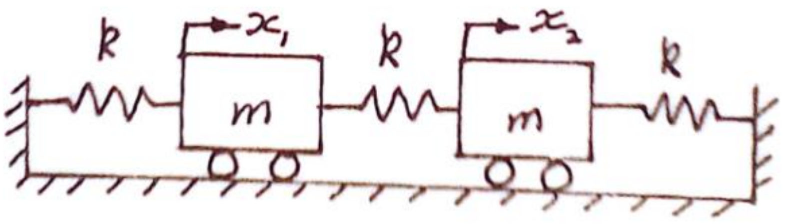
3.1 مدخل:-

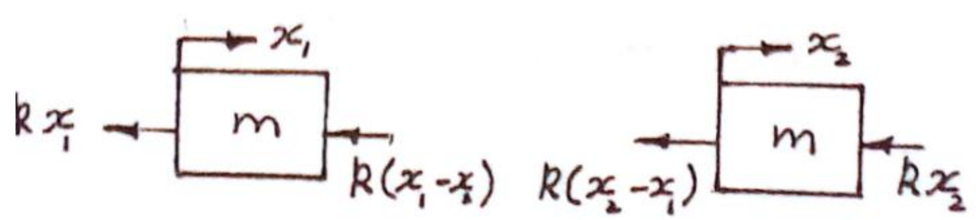
عندما يحتاج الجهاز إلى إحداثيين لوصف حركته يقال أنَّ له درجتان من الحرية. تُمثل الأجهزة من هذا النوع مدخل مبسط للأجهزة متعددة درجات الحرية. والجهاز الذى له درجتان من الحرية له ذبذبتان طبيعيتان. وهنالك علاقة محددة بين سعتي الحركة لمكوني الجهاز المرتبطتين بالإحداثيين تُسمى نمط الاهتزاز. وبالتالي فالجهاز الذى له درجتان من الحرية له نمطان للاهتزاز يقابلان الذبذبتين الطبيعيتين، الإهتزاز الحر عامة تركيبة من نمطى الاهتزاز.

3.2 أمثلة محلولة:-

مثال(1):

أوجد الذبذبتين الطبيعيتين للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه. إرسم مخطَّط يوضِّح هيئة الاهتزاز.





الحل:

معادلة الحركة :

$$-kx_1 - k(x_1 - x_2) = m\ddot{x}_1$$
$$-kx_2 - k(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_2$$

وهذه يمكن إعادة كتابتها هكذا:

$$\ddot{x}_1 + 2p^2x_1 - p^2x_2 = 0$$
$$\ddot{x}_2 + 2p^2x_2 - p^2x_1 = 0$$

حيث أنَّ،

$$P^2 = \frac{k}{m}$$

نفترض أنَّ الحل :

$$x_1 = X_1 \sin \omega t$$
$$x_2 = X_2 \sin \omega t$$

بعد التعويض نحصل على،

$$\left(2p^2 - \omega^2\right) X_1 - p^2X_2 = 0 \qquad (1)$$
$$\left(2p^2 - \omega^2\right) X_2 - p^2X_1 = 0$$

ويمكن كتابتها في شكل مصفوفة،

$$\begin{bmatrix} 2P^2 - \omega^2 & P^2 \\ -P^2 & 2P^2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = 0$$

هذه المعادلة لا تتحقق إلاّ إذا كانت المحددة تساوى صفراً.

$$\begin{vmatrix} 2P^2-\omega^2 & -P^2 \\ -P^2 & 2P^2-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(2p^2-\omega^2\right)^2 - p^4 = 0$$

$$\omega^4 - 4p^2\omega^2 + 3p^4 = 0$$

والحل هو،

$$\omega_1^{\ 2} = p^2 \qquad , \ \omega_2^{\ 2} = 3p^2$$

أي الذبذبتين الطبيعيتين،

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad , \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

لإيجاد أنماط الاهتزاز نعوض $\omega^2 = p^2$ في المعادلة (1) لنحصل على،

$$X_1 - X_2 = 0$$

إذا افترضنا $X_2 = 1$ فإنَّ $X_1 = 1$ وتكتب هكذا،

$$\{X\}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبتعويض $\omega^2 = 3p^2$ في المعادلة (1) نحصل على،

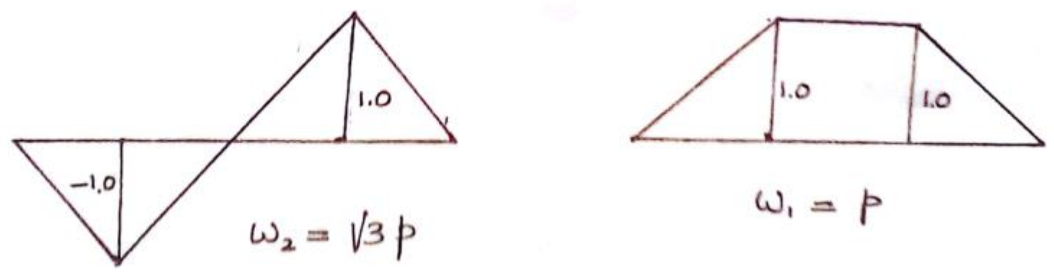
$$-X_1 \ -X_2 = 0$$

وإذا كان $X_2 = 1$ ، فإنَّ $X_1 = -1$

أي أنَّ النمط الثاني للاهتزاز ،

$$\{X\}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

هيئة الاهتزاز كما موضَّح أدناه .



نمط الاهتزاز الأول يشير إلى أنَّ الكتلتين تتحركان في توافق. نمط الاهتزاز الثاني يشير إلى أنَّ الكتلتين تتحركان في تعارض أو عدم توافق تام.

مثال(2):-

الرقاصان الموضَّحان في الرسم أدناه يرتبطان بياى ضعيف k وهو حر عندما يكون قضيبا الرقاصين في الوضع الرأسي. أوجد نمطى الاهتزاز.

الحل:

تأخذ العزوم حول نقطة التعليق لكل رقاص على حدة لنحصل على معادلتي الحركة

$$-ka^2(\theta_1-\theta_2)-mgL\theta_1=mL^2\theta_1$$
$$-ka^2(\theta_2-\theta_1)-mgL\theta_2=mL^2\theta_2$$

والتي يمكن تبسيطها هكذا،

$$\ddot{\theta}_1 + {p_1}^2\theta_1 - {p_2}^2\theta_2 = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 + {p_1}^2\theta_2 - {p_2}^2\theta_2 = 0$$

حيث أنَّ:

$${p_1}^2 = \frac{k}{m}\left(\frac{a}{L}\right)^2 + \frac{g}{L}$$

$${p_2}^2 = \frac{k}{m}\left(\frac{a}{L}\right)^2$$

لنفترض أنَّ الحل:

$$\theta_1 = A_1 \cos\omega t$$

$$\theta_2 = A_2 \cos\omega t$$

بعد التعويض في معادلتي الحركة:

$$\left({p_1}^2 - \omega^2\right)A_1 - {p_2}^2 A_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\left({p_1}^2 - \omega^2\right)A_2 - {p_2}^2 A_1 = 0$$

والحل لا يتحقق إلاّ هكذا،

$$\begin{vmatrix} {P_1}^2 - \omega^2 & -{P_2}^2 \\ -{p_2}^2 & {P_1}^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left({p_1}^2 - \omega^2\right) - {p_2}^4 = 0$$

$$\omega^4 - 2{p_1}^2\omega^2 + \left({p_1}^4 - {p_2}^4\right) = 0$$

$${\omega_1}^2 = {p_1}^2 - {p_2}^2 = \frac{g}{L}$$

$$\omega_2^{\,2} = p_1^{\,2} + p_2^{\,2} = \frac{2k}{m}\left(\frac{a}{L}\right)^2 + \frac{g}{L}$$

وبالتالي فإنَّ الذبذبتين الطبيعيتين للجهاز هما،

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\left[\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}\left(\frac{a}{L}\right)^2\right]}$$

لإيجاد نمطى الاهتزاز عوِّض في المعادلة (2)،

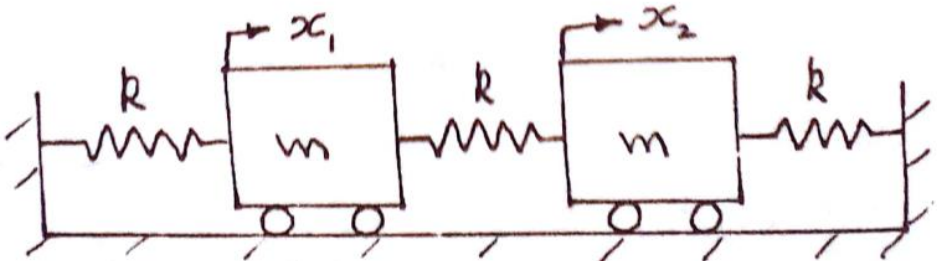
$$\{A\}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \{A\}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وهكذا نري في نمط الاهتزاز الأول الرقاصين وهما يتحركان في توافق بينما يظل الياى حراً. في نمط الاهتزاز الثاني يتحرك الرقاصان في تعارض بينما يكون الياى مشدوداً تارة ومضغوطاً تارة أخرى مع وجود عقدة في الوسط .

مثال(3):

أوجد استجابة الجهاز الموضَّح أدناه عندما تكون الحالات الأولية:-

$$x_1(0) = 5 \;,\; x_2(0) = 0$$
$$\dot{x}_1(0) = 0 \;,\; \dot{x}_2(0) = 0$$



الحل:

لقد وجدنا في المثال الأول الذبذبتين الطبيعيتين ونمطى الاهتزاز كما يلي:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{(1)} = 1$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad , \quad \left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{(2)} = -1$$

يمكن اعتبار الاهتزاز مركباً من نمطى الاهتزاز وبالتالي يمكن كتابة الازاحتين هكذا،

$$x_1(t) = A\sin(\omega_1 t + \phi_1) + B\sin(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$x_2(t) = C\sin(\omega_1 t + \phi_1) + D\sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

الحد الأول على اليمين يمثل النمط الأول وبالتالي،

$$\frac{A}{C} = \left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{(1)} = 1$$

أي أن $C = A$،

وبالمثل،

$$\frac{B}{D} = \left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{(2)} = -1$$

أي أنَّ $D = -B$

وعليه تُصبح معادلتي الحركة هكذا،

$$x_1(t) = A\sin(\omega_1 t + \phi_1) + B\sin(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$x_2(t) = A\sin(\omega_1 t + \phi_1) - B\sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

الحالات الأولية:-

$$t=0\ ,\quad x_1=5\ ,\qquad x_2=0$$

$$0=A\sin\phi_1+B\sin\phi_2$$

$$0=A\sin\phi_1-B\sin\phi_2$$

وعن طريق الجمع والطرح نحصل على،

$$A\sin\phi_1=2.5 \qquad (1)$$

$$B\sin\phi_2=2.5 \qquad (2)$$

والآن نفاضل المعادلتين لإيجاد السرعة وبعد تعويض الحالة الأولية،

$$t=0\ ,\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$$

$$0=A\cos\phi_1\ +\ B\cos\phi_2$$

$$0=A\cos\phi_1\ -\ B\cos\phi_2$$

$A\neq 0$ و $B\neq 0$ بالتالي $\cos\phi_1=\cos\phi_2=0$

ومنها نحصل على،

$$\cos\phi_1=0 \qquad \therefore \phi_1=\frac{\pi}{2}$$

$$\cos\phi_2=0 \qquad \therefore \phi_2=\frac{\pi}{2}$$

وبعد التعويض في المعادلتين (1) ،(2)،

A=B=2.5

وبالتالي،

$$x_1(t)=2.5\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+2.5\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t$$

$$x_2(t) = 2.5\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t - 2.5\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t$$

3.3 ارتباط الإحداثيات:-

يمكن القول بشكل عام بأنَّ حركة الأجهزة من ذات الدرجتين من الحرية تكون مرتبطة بمعنى أنَّ الاحداثيين يظهران في كل معادلة للحركة وعموماً يمكن كتابة معادلتي الحركة هكذا،

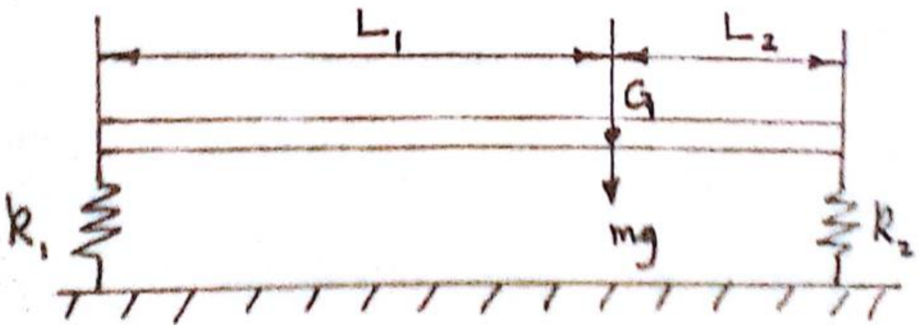
$$m_{11}\ddot{x}_1 + m_{12}\ddot{x}_2 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = 0$$
$$m_{21}\ddot{x}_1 + m_{22}\ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 = 0$$

أو في شكل مصفوفة هكذا،

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

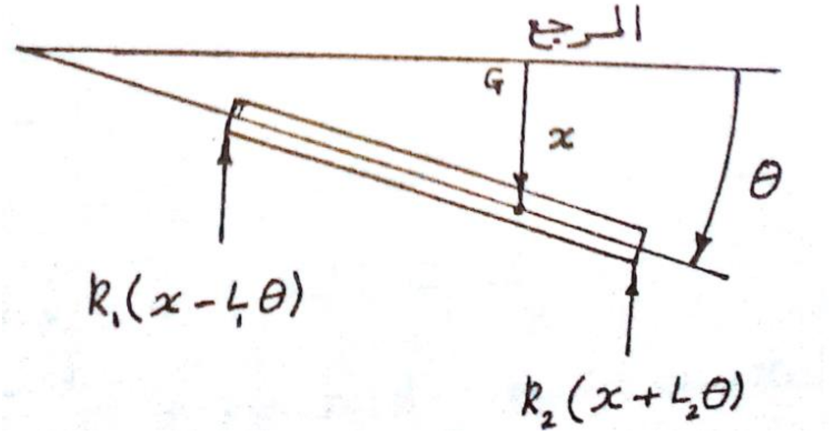
ومن هنا يتضح أنَّ هنالك نوعان من الارتباط: إرتباط ديناميكي ويحدث هذا عندما تكون مصفوفة الكتلة غير قطرية. وارتباط إستاتيكي يحدث عندما تكون مصفوفة الكزازة غير قطرية. يمكن تفادى الارتباط باستخدام نظام إحداثيات مناسب.

الرسم أدناه يمثل قضيب جاسئ لا ينطبق فيه مركز الكتلة مع المركز الهندسي أي $L_1 \neq L_2$ ، والقضيب محمول على يايين k_1, k_2. أنَّ هذا القضيب يمثل جهازاً ذي درجتين من الحرية لأنَّه يحتاج إلى احداثيين لوصف حركته. أنَّ اختيار الاحداثيين سيحدد نوع الارتباط أنَّ كان ارتباطاً ديناميكياً أم استاتيكياً أم ديناميكياً و استاتيكياً معاً.



1.الارتباط الاستاتيكى :

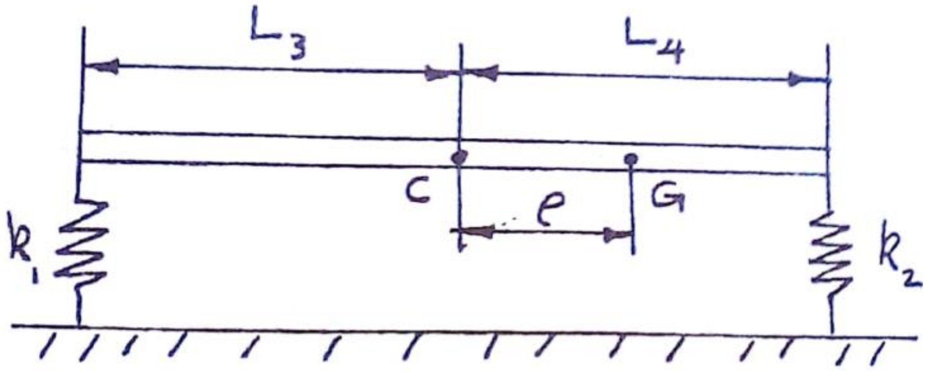
إذا اخترنا θ, x كما موضَّح في الرسم أدناه، حيث أنَّ x هي الإزاحة الخطية لمركز الكتلة G فإنَّ ذلك سيؤدى إلى ارتباط استاتيكى كما توضِّح المعادلة،



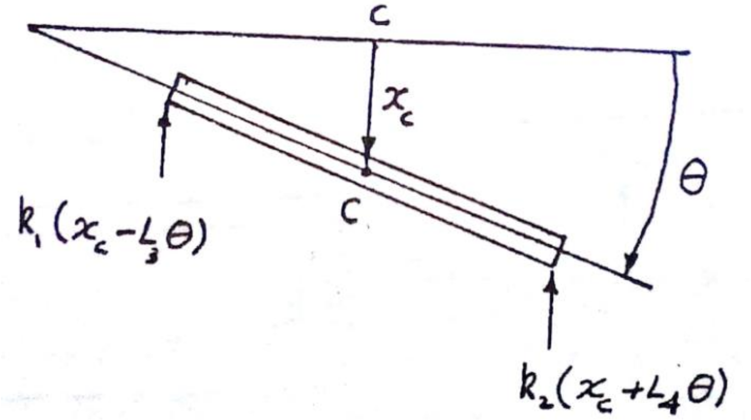
$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & k_2L_2-k_1L_1 \\ k_2L_2-k_1L_1 & k_1L_1^{\ 2}+k_2L_2^{\ 2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. الارتباط الديناميكي:

هنالك نقطة على القضيب C إذا سلطت عندها قوة عمودية على العمود تكون إزاحة القضيب خطية فحسب . هذه النقطة تحددها المعادلة $k_1L_3 = k_2L_4$



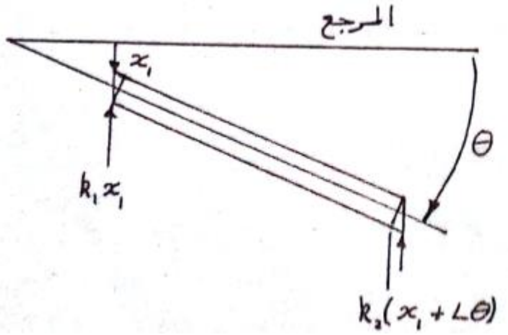
واستخدام θ, x_c يؤديان الى ارتباط ديناميكي

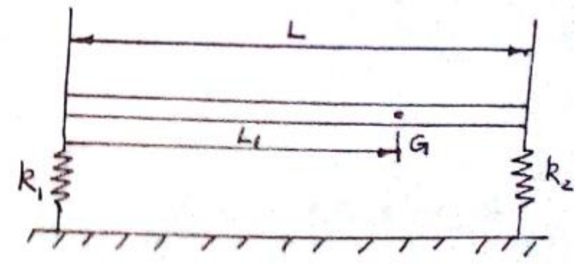


$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & I_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & 0 \\ 0 & k_1L_3{}^2+k_2L_4{}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_c \\ \theta \end{bmatrix}=0$$

3. الارتباط الديناميكي والاستاتيكى:-

إذا اخترنا $x=x_1$ عند طرف القضيب كما موضَّح في الرسم، فإنَّ ذلك يؤدى إلى ارتباط ديناميكي واستاتيكى معاً.





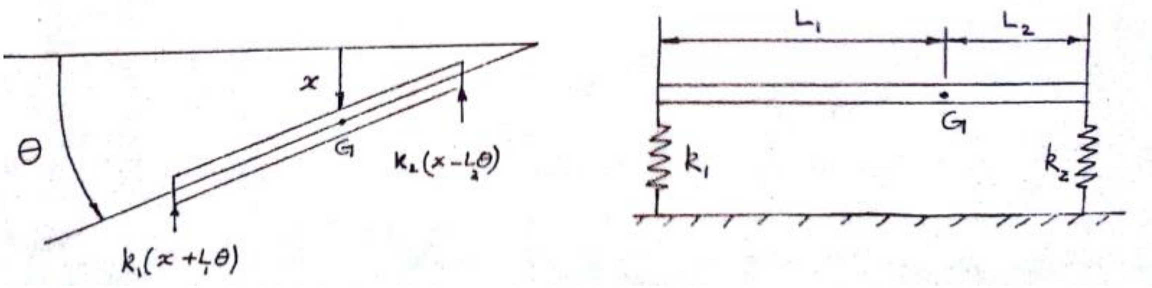
والمعادلة هي:

$$\begin{bmatrix} m & mL_1 \\ mL_1 & I_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & k_2L \\ k_2L & k_2L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \theta \end{bmatrix}=0$$

مثال(4):

أوجد نمطي الاهتزاز لسيارة تمت محاكاتها بجهاز بسيط عبارة عن قضيب له درجتان من الحرية. المعطيات:

$$m = 1500\,kg \quad , \quad I_G = 2100\,kgm^2$$
$$k_1 = 36kN/m \quad , \quad k_2 = 39kN/m$$
$$L_1 = 1.35m \quad , \quad L_2 = 1.65m$$



الحل:

معادلة الحركة الرأسية:

$$-k(x + L_1\theta) - k_2(x - L_2\theta) = m\ddot{x}$$
$$\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}x + \frac{k_1L_1 - k_2L_2}{m}\theta = 0$$

بعد التعويض نحصل على،

$$\ddot{x} + 50x - 10.5\theta = 0 \qquad (1)$$

معادلة الحركة الزاوية . تأخذ العزوم حول G،

$$-k_1(x + L_1\theta)L_1 + k_2(x - L_2\theta)L_2 = I_G\ddot{\theta}$$
$$\ddot{\theta} + \frac{k_1L_1{}^2 + k_2L_2{}^2}{I_G}\theta + \frac{k_1L_1 - k_2L_2}{I_G}x = 0$$

$$\ddot{\theta} + 81.8\theta \; - 7.5x \; = 0 \qquad (2)$$

لتحقيق المعادلتين (1) ،(2)،

$$\begin{vmatrix} 50-\omega^2 & -10.5 \\ -7.5 & 81.8-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(50-\omega^2)(81.8-\omega^2)-10.5\times 7.5 = 0$$

$$\omega^4 - 131.8\omega^2 + 4011 = 0$$

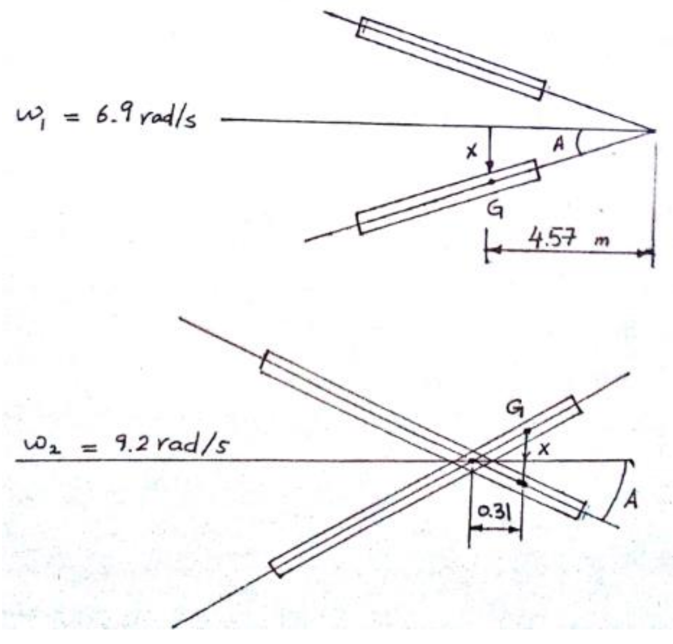
$$\omega_1{}^2 = 47.7(\text{rad/s})^2 ,\ \omega_2{}^2 = 84.1(\text{rad/s})^2$$

$$\omega_1 = 6.9\text{rad/s} \ ,\ \ \omega_2 = 9.2\text{rad/s}$$

وإذا كانت سعة الحركة الخطية X وسعة الحركة الزاوية A، يمكن بالطبع إيجاد نمطي الاهتزاز وهما،

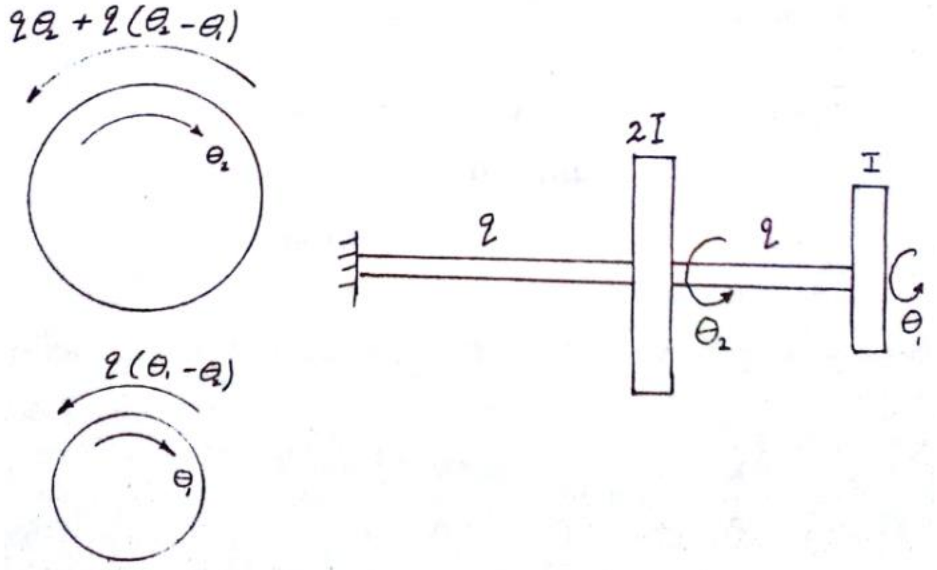
$$\left(\frac{X}{A}\right)^{(1)} = 4.57 \quad , \quad \left(\frac{X}{A}\right)^{(2)} = -0.31$$

هيئة الاهتزاز في الرسم التالي يوضِّح أن هنالك عقدة في مقدمة القضيب وعلى بعد 4.57m من مركز الكتلة فى النمط الأول. وفى النمط الثاني نجد أنَّ العقدة خلف مركز الكتلة بمسافة 0.31m.



مثال(5):

أوجد الذبذبتين الطبيعيتين وهيئتى الاهتزاز للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه.



الحل:-

معادلات الحركة:

$$-q(\theta_1-\theta_2)=I\ddot{\theta}_1$$

$$\ddot{\theta}+p^2\theta_1-p^2\theta_2=0 \qquad (1)$$

$$-q\theta_2-q(\theta_2-\theta_1)=2I\ddot{\theta}_2$$

$$\ddot{\theta}_2+p^2\theta_2-0.5p^2\theta_1 \qquad (2)$$

حيث أنَّ:- $P^2=\dfrac{q}{I}$

الحل لا يتحقق إلاّ بالتالي،

$$\begin{vmatrix} p^2-\omega^2 & -p^2 \\ -0.5p^2 & p^2-\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

$$\omega^4-2p^2\omega^2+0.5p^4=0$$

$$\omega_1{}^2=0.29p^2 \quad ,\omega_2{}^2=1.71p^2$$

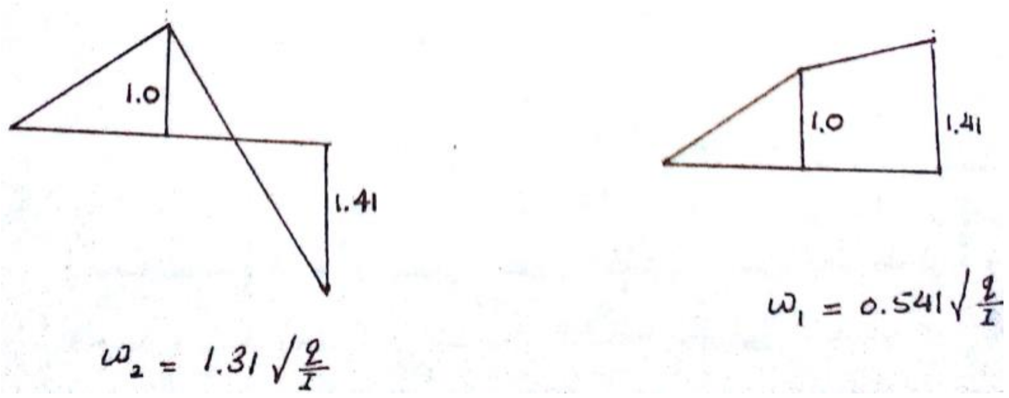
أي أنَّ الذبذبتين الطبيعيتين هما:

$$\omega_1 = 0.54\sqrt{\frac{q}{I}} \quad , \quad \omega_2 = 1.31\sqrt{\frac{q}{I}}$$

إذا كانت سعتي الحركة الزاوية A_2 و A_1 ، فإنَّ نمطى الاهتزاز يمكن إيجادهما وهما،

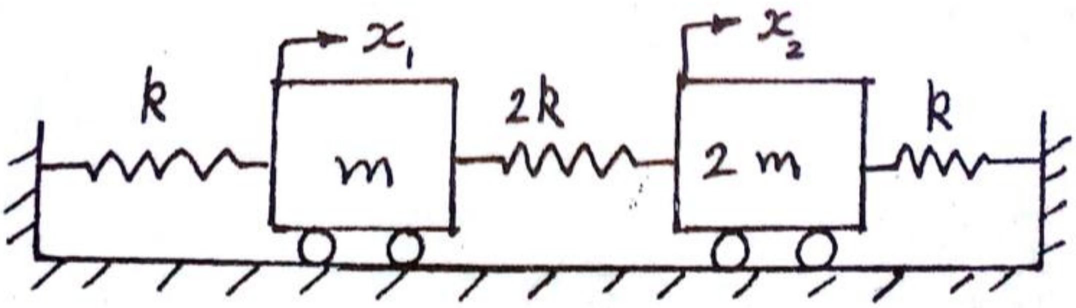
$$\{A\}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.41 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \{A\}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1.41 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وهيئتا الاهتزاز كما موضَّح في الرسم أدناه.



3.4 تمرين

1. أوجد الذبذبتين الطبيعيتين ونمطي الاهتزاز ثم أرسم هيئة الاهتزاز للجهاز الموضَّح في الرسم .

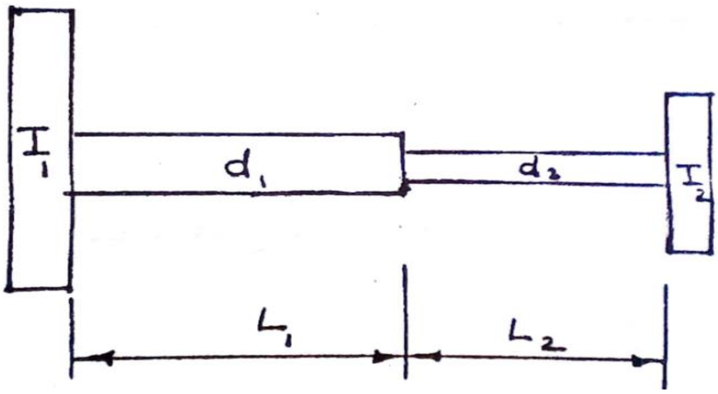


$$\text{Ans.}\left(\omega_1 = 0.81\sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = 1.961\sqrt{\frac{k}{m}}, \left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{(1)} = 0.85 , \left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{(2)} = -2.35\right)$$

2. أوجدالذبذبة الطبيعية ونمط الاهتزاز لجهاز الالتواء الموضَّح في الرسم. المعطيات:

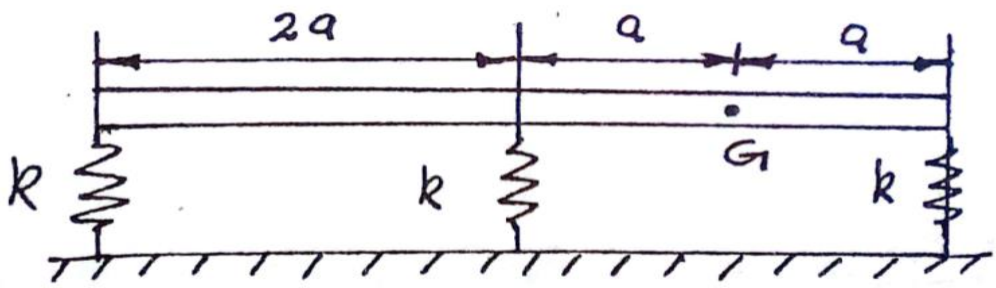
$d_1 = 25mm$,$d_2 = 20$ mm ,$L_1 = 300$ mm , $L_2 = 150$ mm ,$I_1 = 0.57$ kg m^2

$I_2 = 0.34 kgm^2$,$G = 80 kN/mm^2$



Ans. $(\omega = 4.39 rad/s, \frac{A_1}{A_2} = -0.6)$

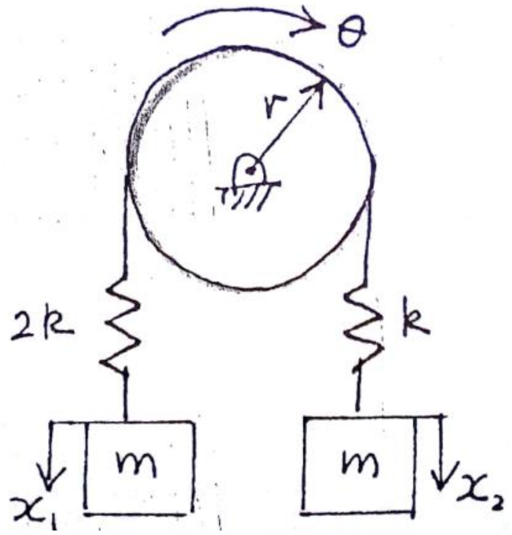
3.جسم جاسئ كتلته m محمول على ثلاثة يايات على أبعاد متساوية ولكل ياى ثابت k. مركز الكتلة G يقع فى منتصف المسافة بين يايين. نصف قطر الدوران حول محور عبر G قائم على مستوى الرسم a فى موضع الاتزان يكون الجسم افقياً. أوجد الذبذبتين الطبيعيتين وهيئتى الاهتزاز ومواضع العقد.



Ans. $\left(\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \omega_2 = , \sqrt{\frac{12k}{m}}\right)$

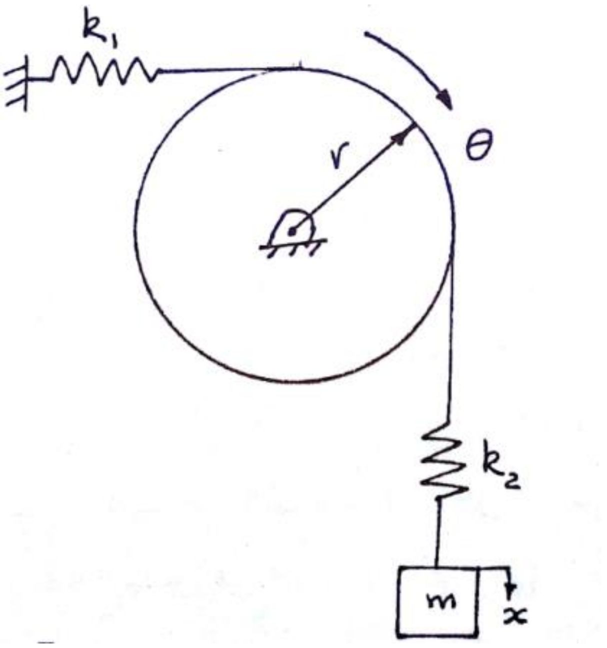
العقدة الاولى فى الطرف اليسار للقضيب والعقدة الثانية على يمين G بمسافة $\frac{a}{3}$)

4. بكرة نصف قطرها r ولها عزم قصور ذاتى 2I تحمل كتلتين متساويين m بواسطة يايين لهما ثابتان 2k , k. واليايان بدورهما يتصلان بحبل يمر حول البكرة. نفترض أنَّ الكتلتين تتحركان فى اتجاه رأسي فقط بينما البكرة بامكانها الدوران بحرية. استنتج معادلات الحركة.



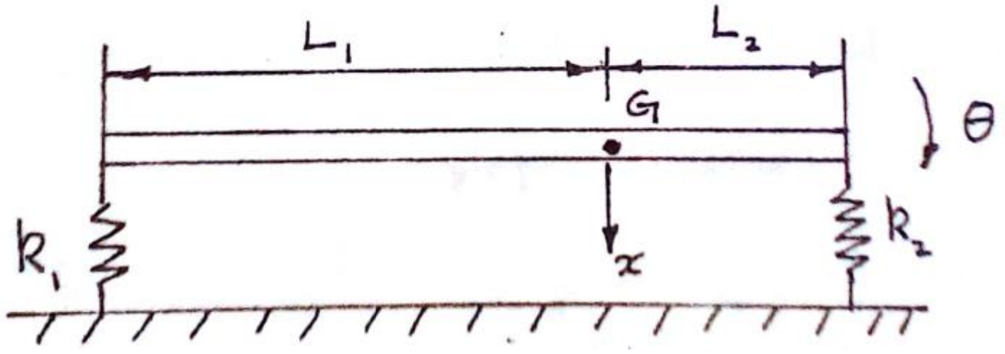
$$\text{Ans.}\begin{bmatrix} m\ddot{x}_1 + 2k(x_1 + r\theta) = 0 \\ m x_2 + k(x_2 - r\theta) = 0 \\ I\ddot{\theta} + 3kr^2\theta + 2krx_1 \quad - krx_2 = 0 \end{bmatrix}$$

5. بكرة لها عزم قصور ذاتى حول محور الدوران I ومحكومة بياى أفقي له ثابت k_1 كما فى الرسم أدناه. هنالك ياى آخر له ثابت k_2 يتصل بكتلة m استنتج معادلة الحركة.



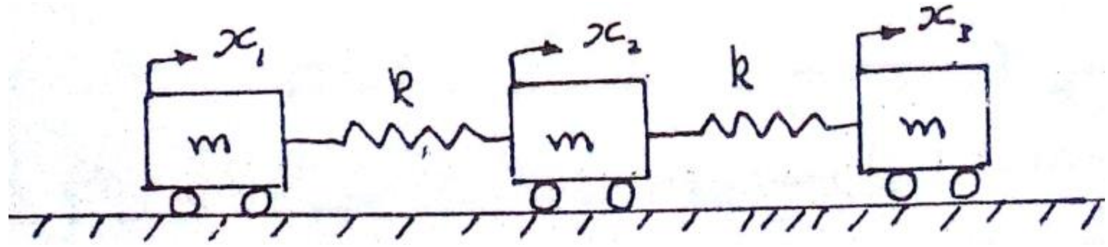
Ans. $\begin{bmatrix} (I\ddot{\theta} + k_1 r^2\theta - k_2 r(r\theta - x) = 0 \\ m\ddot{x} + k_2(x - r\theta) = 0) \end{bmatrix}$

6. قضيب غير منتظمAB طوله L = 1.6m مسنود على يايين k_1=3kN/m , k_2=5kN/m كتلة القضيب 9kg وله نصف قطر دوران حول مركز الكتلة G مقداره 0.3m اذا علمنا أنَّ L_1=1m, L_2=0.6m، أوجد الذبذبتين الطبيعيتين.



Ans. $(\omega_1 = 29.8 \text{rad/s} \ , \omega_2 = 77.0 \text{rad/s})$

7. أوجد الذبذبات الطبيعية للجهاز الموضَّح أدناه. أوجد انماط الاهتزاز ثم أرسم هيئة الاهتزاز.

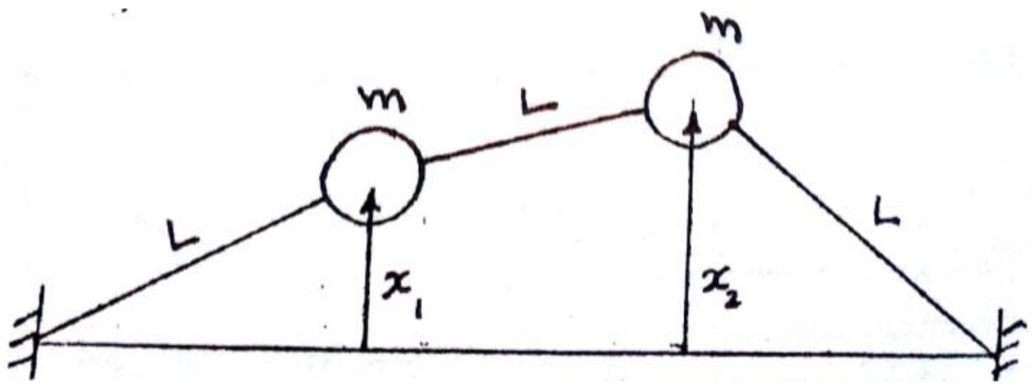


Ans. $\left[\begin{array}{l} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\dfrac{3k}{m}}, \\ \{X\}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \{X\}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \end{array}\right)$

8. كتلتان موصلتان بسلك قوة الشد فيه T. أنظر الرسم. على افتراض أنَّ T تظل ثابته ولاتتغير عند ازاحة الكتلتين فى اتجاه عمودى على السلك، برهن أنَّ الذبذبتين الطبيعيتين للجهاز هى:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{T}{mL}} \;, \omega_2 = \sqrt{\frac{3T}{mL}}$$

أرسم هيئة الاهتزاز :

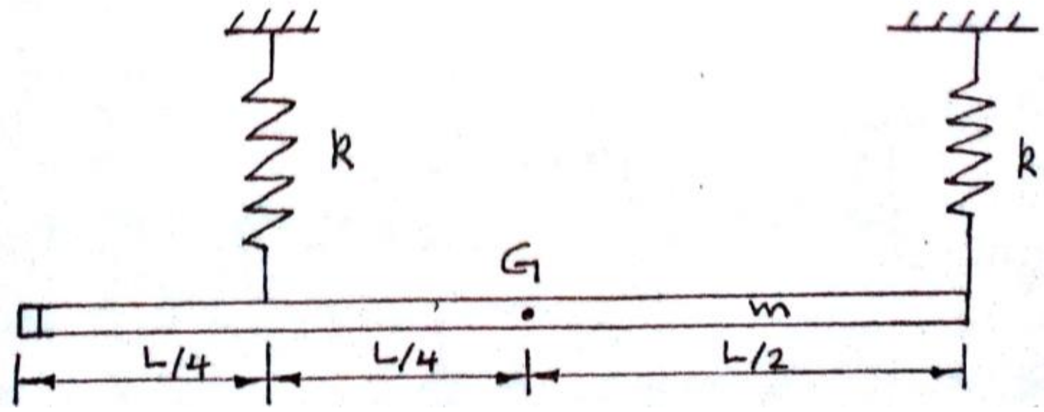


Ans. $\left[\left(\dfrac{X_1}{X_2}\right)^{(1)} = 1 \;, \left(\dfrac{X_1}{X_2}\right)^{(2)} = -1\right]$

9. اختر الاحداثيين x لازاحة G و θ لدوران القضيب فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة

أوجد الذبذبتين الطبيعيتين. G مركز الكتلة .

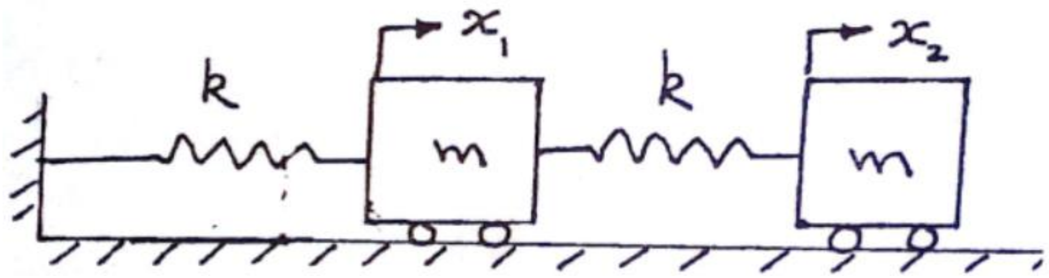
إذا كانت θ فى اتجاه دوران عقارب الساعة فهل يترتب على ذلك أي اختلاف؟



$$\text{Ans.}\left(\omega_1 = 1.282\sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\omega_2 = 2.026\sqrt{\frac{k}{m}},\left(\frac{X_1}{\theta}\right)^{(1)} = 0.7L\ \ ,\left(\frac{X}{\theta}\right)^{(2)} = -0.119L\right)$$

10. بدأ الجهاز الموضَّح فى الرسم أدناه من الحالة الاولية التالية:

$$x_1(0) = 0 \quad , x_2(0) = 1.0$$
$$\dot{x}_1(0) = \quad \dot{x}_2(0) = 0$$



برهن ان معادلتى الحركة كما يلى:

$$x_1(t) = 0.447\cos\omega_1 t - 0.447\cos\omega_2 t$$

$$x_2(t) = 0.722\cos\omega_1 t + 0.278\cos\omega_2 t$$

حيث أنَّ
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{0.382k}{m}}\ ,\omega_2 = \sqrt{\frac{2.618k}{m}}$$

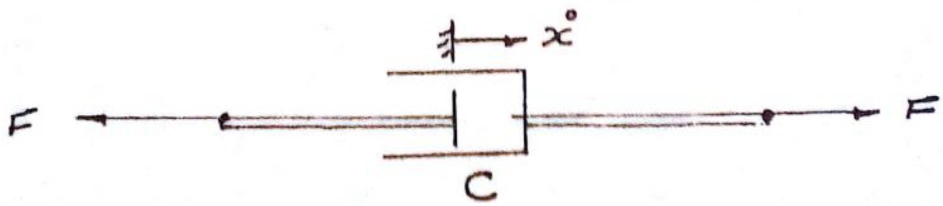
الفصل الرابع

الاهتزاز الحر المتضائل

(Damped Free Vibration)

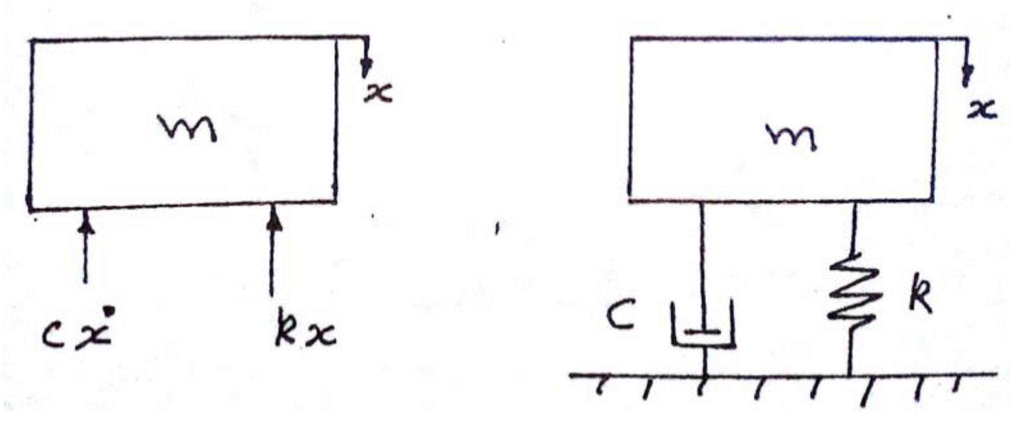
1.4 مدخل:-

هنالـك أنـواع كثيـرة للمضـاءلة، ولكـن أكثرهـا شـيوعاً ويسـراً فـي التحليـل هـي المضـاءلة اللزجـة والمضائل اللزج عبارة عن كباس يتحرك داخل أسطوانة ممتلئة بالزيت. ويرمز للمضائل هكذا:



والعلاقة بين القوة المسلَّطة F ومعامل المضاءلة c والسرعة $\dot{x}$ كما يلي وهى علاقة خطية بين القوة والسرعة $F = c\dot{x}$ ، وعليه فان وحدة قياس معامل المضاءلة Ns/m.

نأخذ جهاز له درجة واحدة من الحرية كما في الرسم أدناه،



معادلة الحركة،

$$-c\dot{x} - kx - m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة هكذا،

$$\ddot{x} + 2\xi p\dot{x} + p^2x = 0$$

حي ان ξ, p ثابتان،

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \xi = \frac{c}{2mp}$$

الحل التقليدي للمعادلة التفاضلية،

$$x = e^{\lambda t}$$

حيث أنَّ λ ثابت. وبعد التعويض في المعادلة نحصل على،

$$\left(\lambda^2 + 2\xi p\lambda + p^2\right)e^{\lambda t} = 0$$

والحل يتطلب الآتي

$$\lambda^2 + 2\xi p\lambda + p^2 = 0$$

$$\lambda = -\xi p \pm p\sqrt{\xi^2 - 1}$$

وبالتالي فالحل العام هو

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

حيث أنَّ B وA ثابتان يمكن إيجادها من الحالة الأولية. وبعد تعويض قيمة λ_1 و λ_2 يكون الحل

$$X = e^{-\xi pt}\left[Ae^{p\sqrt{\xi - 1t}} + Be^{-p\sqrt{\xi^2 - 1}\ t}\right]$$

الحد الأول $e^{-\xi pt}$ عبارة عن دالة تناقص أسى مع الزمن. أما سلوك الحدين داخل القوس المربع يعتمد على ما إذا كانت القيمة $\xi^2 - 1$ موجبة، أو سالبة، أو صفراً. عندما تكون $\xi > 1$ فان جذري المعادلة يكونان عددين حقيقيين، وفى هذه الحالة يقال أنَّ المضاءلة مرتفعة ولا تؤدى إلى

تأرجح الجهاز. وعندما تكون $\xi < 1$ يكون الجذران عددين مركبين وفى هذه الحالة يقال أنَّ المضاءلة منخفضة ويؤدى ذلك إلى تأرجح الجهاز.

الحالة الفاصلة بين التأرجح وعدمه هو عندما تكون $\xi = 1$ وعندها يصبح الجذران متساويين في القيمة ولا يحدث تأرجح للجهاز ويقال في هذه الحالة أنَّ المضاءلة حرجة. سنناقش هذه الحالات الثلاث مرة أخري ويقدر اكبر من التفصيل. ولكن قبل ذلك نتعرض لمعامل المضاءلة الحرجة ويرمز لها بـc_c وبالتالي فإنَّ،

$$\xi = \frac{c_c}{2mp} = 1$$

أي أنَّ معامل المضاءلة الحرجة،

$$c_c = 2mp$$

ومن هنا نستنتج أنَّ ξ هي النسبة بين معامل المضاءلة ومعامل المضاءلة الحرجة وتسمى نسبة المضاءلة.

(أ) الحركة التأرجحية: المضاءلة المنخفضة $\xi < 1$

الحل:

$$x = e^{-\xi pt}\left[Ae^{ip\sqrt{1-\xi^2}t} + Be^{-ip\sqrt{1-\xi^2}t}\right]$$

ويمكن كتابتها كما يلي

$$x = e^{-\xi pt}\left[\frac{\dot{x}(0)\xi pt(0)}{p\sqrt{1-\xi^2}}\sin\sqrt{1-\xi^2 t} + x(0)\right]$$

$$x = Xe^{-\xi pt}\sin\left(p\sqrt{1-\xi^2}t + \phi\right)$$

أو

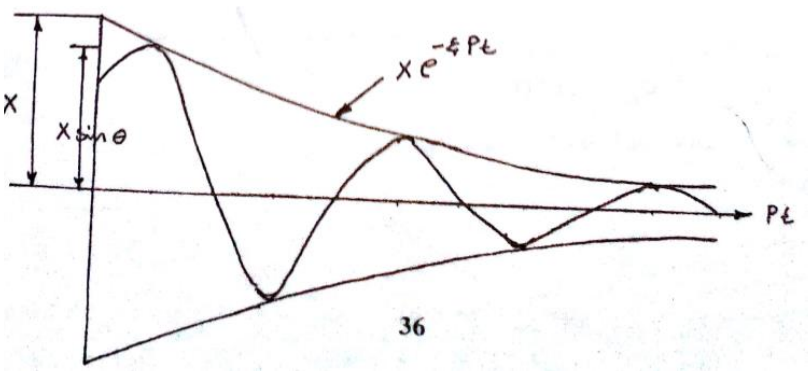
$$x = X_o e^{-\xi pt} \cos\left(p\sqrt{1-\xi^2 t} - \phi_o\right)$$

حيث أنَّ X, ϕ, X_o, ϕ_o ثوابت يمكن إيجادها من الحالات الأولية $x(0), \dot{x}(0)$ فإنَّ،

وهذه المعادلة تفيد ان ذبذبة الاهتزاز المتضائل،

$$p_d = \frac{2\pi}{T_d} = p\sqrt{1-\xi^2}$$

والرسم التالى يوضِّح تلاشى الاهتزاز



(ب) الحركة غير التارجحية. حالة المضاءلة المرتفعة $\xi > 1$.

الحل :

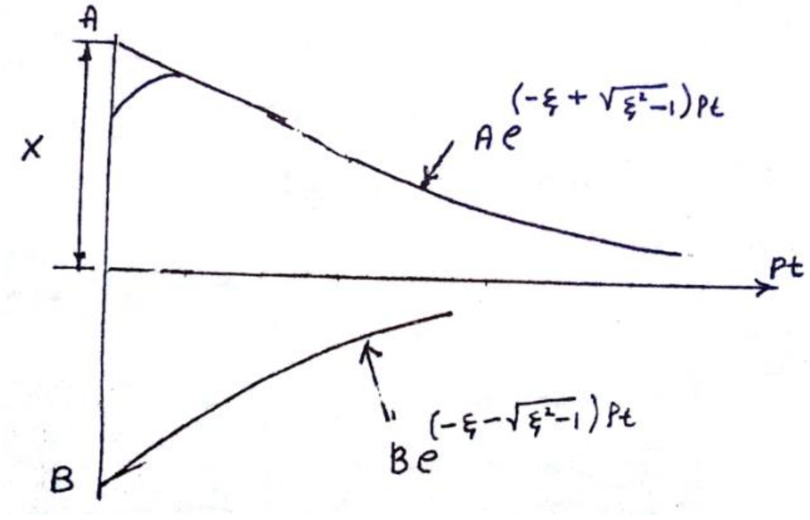
$$x = Ae^{\left(-\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)pt} + Be^{\left(-\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)pt}$$

حيث أنَّ:

$$A = \frac{\dot{x}(0) + \left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right)px(0)}{2P\sqrt{\xi^2-1}}$$

$$B = \frac{-\dot{x}(0) + \left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)px(0)}{2P\sqrt{\xi^2-1}}$$

والمنحنى كما موضَّح في الرسم أدناه،



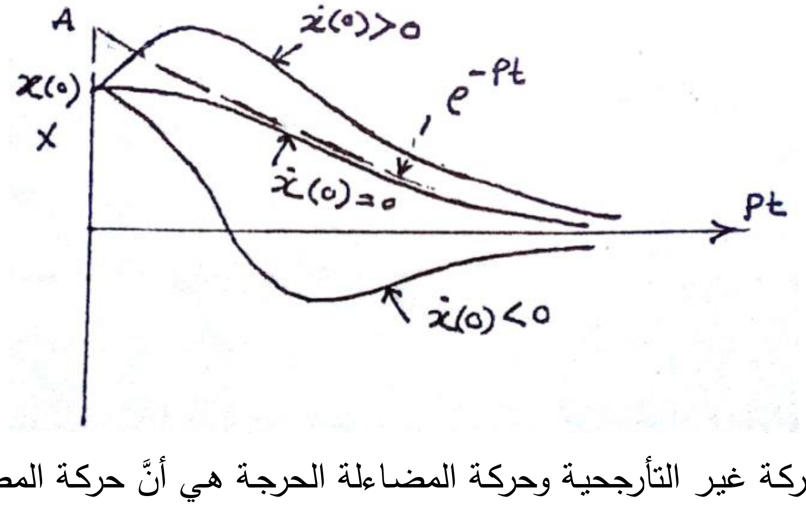
(ج) حركة المضاءلة الحرجة $\xi = 1$ في هذه الحالة $\lambda_1 = \lambda_2 = -p$.

والحل :

$$x = (A + Bt)e^{-pt}$$

أو

$$x = e^{-pt}\{[\dot{x}(0) + px(0)]t + x(0)\}$$



والفرق بين الحركة غير التأرجحية وحركة المضاءلة الحرجة هي أنَّ حركة المضاءلة الحرجة أسرع في التلاشي. ولهذا السبب كثير من الأجهزة لها مضاءلة حرجة لتلافى التجاوز (overshoot) والتأرجح.

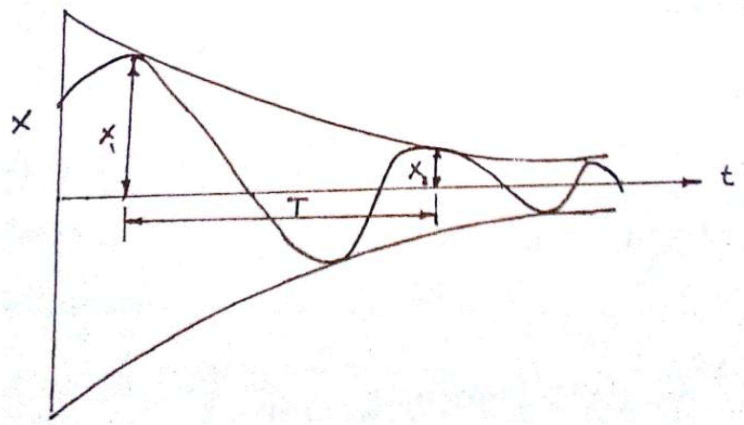
4.2 التناقص اللوغريثمى:

طريقة سهلة لإيجاد مقدار المضاءلة الموجودة في الجهاز تتمثل في قياس معدل تلاشى التأرجحات. وكلما كبرت المضاءلة كلما زاد معدَّل التلاشي.

خذ اهتزاز متضائل يمكن التعبير عنه بالمعادلة

$$x = Xe^{-\xi pt}\sin\left(p\sqrt{1-\xi^2 t+\phi}\right)$$

وهذه موضَّحة فى الرسم أدناه.



نستخدم مصطلح التناقص اللوغريثمى وهو اللوغريثم الطبيعي للنسبة بين أي سعتين متتاليتين. أي أنَّ التناقص اللوغاريثمي ويرمز له بالحرف δ.

$$\delta = \ln\frac{X_1}{X_2}$$

$$\delta = \frac{e^{-\xi pt}\sin\left(p\sqrt{1-\xi^2}\,t_1+\phi\right)}{e^{-\xi p(t_1-T)}\left[\sqrt{1-\xi^2}\,(t_1-T)+\phi\right]}$$

ونسبة لأنَّ قيم $\sin\theta = \sin(\theta+2\pi)$، فإنَّ المعادلة السابقة يمكن تبسيطها هكذا،

$$\delta = \ln\frac{e^{-\xi pt}}{e^{-\xi p(t_1-T)}} = \ln e^{\xi pt} = \xi PT$$

نعوِّض للزمن الدوري،

$$T = \frac{2\pi}{p\sqrt{1-\xi^2}}$$

لنحصل على الصيغة الدقيقة للتناقص اللوغاريثمي

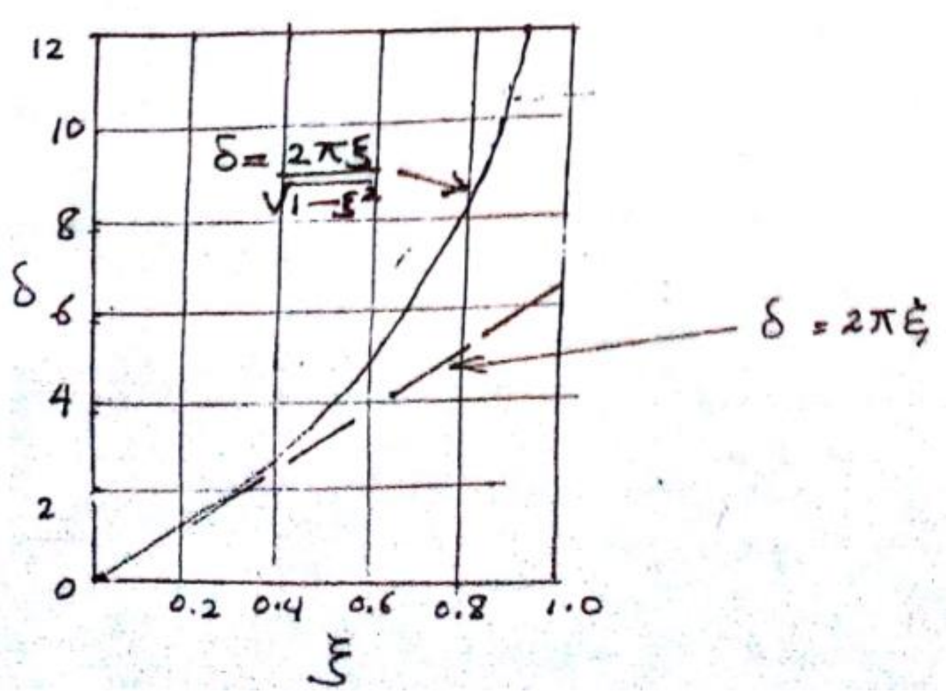
$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

وعندما تكون ξ صغيرة، يصبح $\sqrt{1-\xi^2} = 1$

والحل التقريبي،

$$\delta = 2\pi\xi$$

الرسم التالي يوضِّح الصيغتين الدقيقة التقريبية.



مثال(1):

البيانات التالية تتعلق بجهاز يتكون من كتلة وياي ومضائل وقيمها m=4kg، c=21Ns/m، k=5260N/m. أوجد التناقص اللوغريثمي في حالة اهتزاز الجهاز وكذلك النسبة بين أي سعتين متتاليتين.

الحل:

$$P = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5260}{4}} = 36.3 \text{ rad/s}$$

معامل المضاءلة الحرجة،

$$c_c = 2mp = 2 \times 4 \times 36.3 = 290 \,\text{Ns/m}$$

نسبة المضاءلة،

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{21}{290} = \underline{0.0724}$$

التناقص اللوغاريثمي،

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\delta = \frac{2\pi \times 0.0724}{\sqrt{1-0.0724^2}} = \underline{0.456}$$

إذن نسبة أي سعتين متتاليتين،

$$\frac{X_1}{X_2} = e^{\delta} = e^{0.456} = \underline{1.58}$$

مثال(2):

برهن أنَّ التناقص اللوغاريثمي يمكن حسابه من المعادلة الآتية:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{X_o}{X_n}$$

حيث x_n تمثل سعة الحركة بعد مرور n دورة. أرسم منحني نسبة المضاءلة وعدد الدورات التي تؤدي إلي تناقص السعة بنسبة 50%

$$\frac{X_0}{X_1} = \frac{X_1}{X_2} = \frac{X_2}{X_3} \cdots \frac{X_{n-1}}{X_n} = e^{\delta}$$

النسبة $\frac{X_o}{X_n}$ يمكن كتابتها هكذا،

$$\frac{X_0}{X_n} = \left(\frac{X_0}{X_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_2}\right)\left(\frac{X_2}{X_3}\right) \cdots \left(\frac{X_{n-1}}{X_n}\right)$$

$$\frac{X_0}{X_n} = \left(e^{\delta}\right)^n = e^{n\delta}$$

ومنها تستنتج،

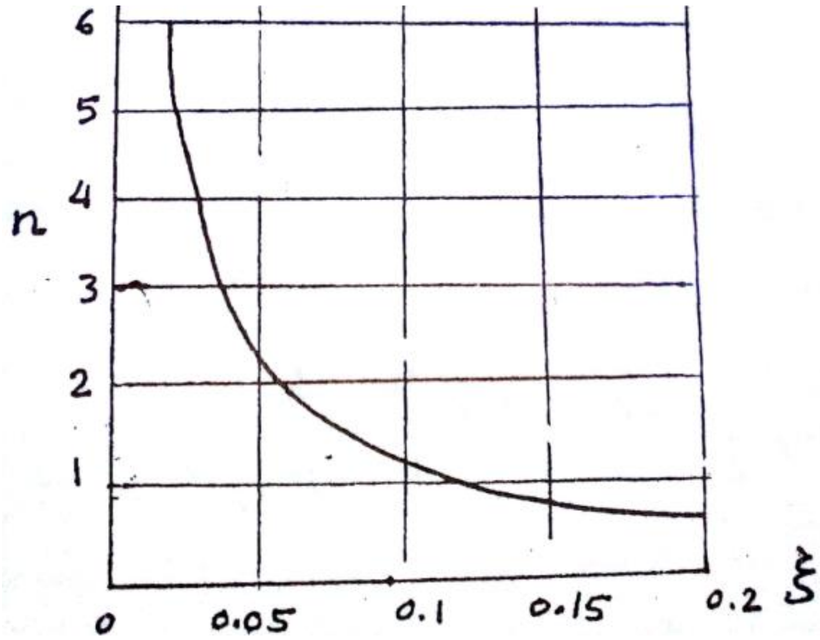
$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{X_o}{X_n}$$

لإيجاد عدد الدورات التي بمرورها تنخفض سعة الحركة بنسبة 50%. من المعادلة السابقة،

$$\delta = 2\pi\xi = \frac{1}{n} \ln 2 = \frac{0.693}{n}$$

$$n\xi = \frac{0.693}{2\pi} = 0.110$$

وهذه المعادلة هي المطلوبة والمنحني $\xi - n$ كما في الرسم أدناه.



4.3 تمرين:

1. كتلة 1kg تتصل بطرف ياي له ثابت 700N/m . أوجد معامل المضاءلة الحرجة.

Ans. (c_c=52.9Ns/m)

2. لتدريج مضائل ، تم قياس سرعة الكباس عند تسليط قوة محددة عليه. إذا كان قوة 2.5N أنتجت سرعة ثابتة 30mm/s، أوجد نسبة المضاءلة عند استخدام هذا المضائل مع الجهاز الذي ورد وصفه في المسألة (1). Ans. $(\xi = 1.57)$

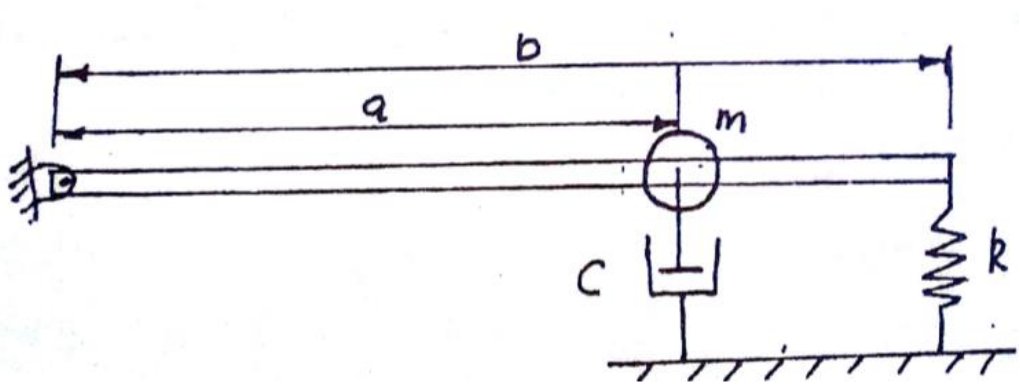
3. جهاز له كتلة 2.267kg وثابت ياي 1.75kN/m، ومضائل لزج يهتز بحيث تكون أي سعتين متتاليتين 1.00و 0.98. أوجد:

(أ) الذبذبة الطبيعية للاهتزاز المتضائل (ب) نسبة المضاءلة

(ج) التناقص اللوغريثمى. (د) معامل المضاءلة

Ans. $(\mathbf{p} = 27.8\mathbf{rad/s} \ , \delta = 0.0202 \ , \xi = 0.003215 \ , \mathbf{c} = 0.405)$

4. اكتب معادلة الحركة للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه ثم أوجد الذبذبة الطبيعية للاهتزاز المتضائل وكذلك معامل المضاءلة الحرجة.



Ans. $\left[\begin{array}{l} \ddot{\theta}+\dfrac{c}{m}\dot{\theta}+\left[\dfrac{b}{a}\right]^2\dfrac{k}{m}\theta=0 \\ P_d=\sqrt{\left\{\dfrac{k}{m}\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-\left(\dfrac{c}{2m}\right)^2\right\}} \quad , c_c=2m\left(\dfrac{b}{a}\right)\sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{array}\right]$

5. جهاز يتكون من كتلة وياى ومضائل أزيح من موضع الاتزان ثم أطلق. إذا تناقصت سعة الحركة 5% كل دورة، ماهي نسبة المضاءلة في الجهاز؟ Ans. $(\xi = 0.00816)$

6. ماسورة مدفع كتلتها 540kg لها ياى للارتداد ثابته 300kN/m. إذا إرتدت الماسورة بعد إطلاق القذيفة 1.2m، أوجد (أ) السرعة الأولية للارتداد. (ب) معامل المضاءلة الحرجة للمضائل الذي يتصل بالماسورة عند نهاية شوط الارتداد. (ج) الزمن المطلوب لكي تعود الماسورة الى موضع 50mm من الموضع الأول.

Ans. $(t = 0.214s, \dot{x} = 28.3m/s, c_c = 25488\,Ns/m)$

7 . مضائل برَّاد تصميمه بحيث يصبح التجاوز (overshoot) 10% من الإزاحة الأولية عند إطلاقه ، أوجد ξ_1. إذا كانت $\xi = \frac{1}{2}\xi_1$ ، فكم سيكون التجاوز.

Ans. $(\xi_1 = 0.59 \;,\;\; Xovershoot = 0.379)$

8. جهاز في حالة اهتزاز يتكون من كتلة 4.534kg، وياي له ثابت 3.5kN/m، ومضائل له معامل مضاءلة 12.43Ns/m. أوجد:

(أ) نسبة المضاءلة (ب) التناقص اللوغاريثمي (ج) نسبة أي سعتين متتاليتين

Ans. $\left(\xi = 0.0493 \quad , \delta = 0.31 \, , \frac{X_0}{X_1} = 1.36\right)$

9 . جهاز يهتز له البيانات التالية c=70Ns/m , m=17.5kg , k=7kN/m . أوجد :

(ا) نسبة المضاءلة (ب) الذبذبة الطبيعية للاهتزاز المتضائل

(ج) التناقص اللوغاريثمي (د) نسبة أي سعتين متتاليتين

Ans. $\left(\xi = 0.1 \quad , p_d = 19.9 \text{rad/s} \quad , \delta = 0.6315 \, , \frac{X_0}{X_1} = 1.88\right)$

10. طاقة الارتداد لمدفع ضخم يتم امتصاصها بواسطة ياى . فى نهاية الارتداد، يتم تعشيق جهاز مضاءلة بحيث يعود المدفع لوضع إطلاق النار بدون ذبذبة. نوع من هذه المدافع كتلته 36.3 طن ومسافة الارتداد 3m من سرعة أولية 9m/s. أوجد ثابت الياى. أوجد اقل معامل للمضاءلة اللزجة الذى يؤدى الى عودة المدفع لوضعه الأول بدون تأرجح حول موضع الاتزان.

Ans. (k=327kN/m , c_c=218kNs/m).

11. جهاز يتكوَّن من كتلة وياي ومضائل يهتز بذبذبة 6Hz. بعد 10s وجد أنَّ سعة الحركة انخفضت الى 70% من قيمتها الأولية. أحسب التناقص اللوغاريثمي ومن ثم أحسب نسبة المضاءلة.

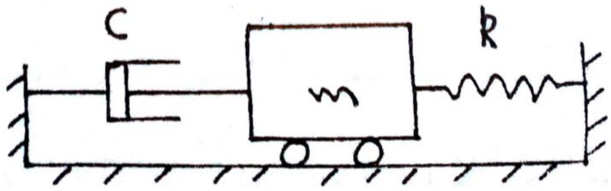
Ans. $(\xi = 0.000946 \;, \delta = 0.00594)$

12.الازاحـات القصـوى المتتاليـة لجهـاز يتكـون مـن كتلـة ويـاي ومضـائل كانـت 38.4mm

48mm , 60mm , 75mm . إذا علمنا ان m=20kg , k=800N/m ، أوجد:

(أ) نسبة المضاءلة (ب) معامل المضاءلة اللزج

أنظر الرسم.



Ans. $\left(\xi = 0.0355 \quad , c = 9\mathrm{Ns/m}\right)$

13. ماسورة مدفع ميدان كتلتها 635kg تعود إلى موضع الإطلاق بعد الارتداد بواسطة جهاز إرجاع يتكون من مضائل وياى له ثابت 148kN/m أوجد قيمة معامل المضاءلة للجهاز والذي يؤدى إلى عودة الماسورة الى موضع الإطلاق فى أقصر مدة ممكنة بدون تأرجح.

Ans. (c=19.4kNs/m)

14. جهاز له مضاءلة حرجة تم إطلاقه من سكون في موضع عشوائى x_0 عند $t = 0$،أوجد:

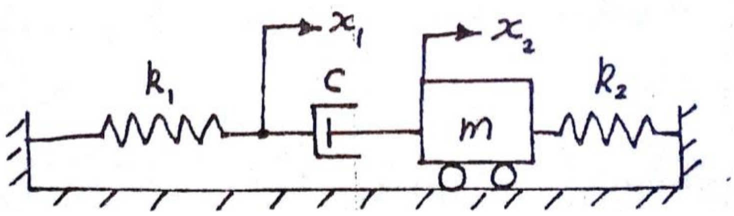
(أ) موضع الجهاز في أي زمن t . (ب)إذا أستخدمت النتيجة المتحصلة في (أ) في المدفع المذكور في المسألة (13)، أوجد الزمن الذى تكون فيه الماسورة في منتصف الطريق لموضع الإطلاق.

Ans. $\left(x = x_0 e^{-pt}(1+pt), t = 0.1108\mathrm{s}\right)$.

15. إذا افترضنا ان ماسورة المدفع في المسالة (13) تم تعديلها مما أدي إلى زيادة كتلتها 181kg، أوجد الثابت k لجهاز الإرجاع الذى يجب أن يستخدم إذا ظل جهاز الإرجاع حرج المضاءلة.

Ans. (k=115.6kN/m).

16.استنتج المعادلات التفاضلية للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه.



Ans. $\left(m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + k_2 x_2 = c\dot{x}_1 \ , \ \ c\dot{x}_1 + k_1 x_1 = c\dot{x}_2 \right)$