مذكرة محاضرات ميكانيكا المواد

الجزء الثاني

Lecture Notes on Mechanics of Materials
Part Two

تأليف

بروفيسور/ محمود يس عثمان

دكتور/ أسامة محمد المرضي سليمان خيال

قسم الهندسة الميكانيكية

كلية الهندسة والتقنية

جامعة وادي النيل

عطبرة – السودان

إبريل 2019م

شكر وعرفان

الشكر والعرفان لله والتبريكات والصلوات على رسوله وخادمه محمد وعلـــى آلـــه وصـــحابته وجميع من تبعه وتَقفّى أثره إلى يوم القيامة.

يود الكاتب ان يتقدم بالشكر أجذله لكل من ساهم بجهده وفكره ووقته في إخراج هـــذه المـــذكرة بالصورة المطلوبة ، ويخُص بذلك الزملاء/ الأساتذة بقسم الهندسة الميكانيكية بجامعة وادي النيل ـــ عطبرة ، وأيضاً الإخوة/ الأساتذة بقسم الهندســـة الميكانيكيـــة بجامعـــة البحـــر الأحمـــر ـــ بورتسودان.

الشكر والتقدير والعرفان للبروفيسور/ محمود يس عثمان الذي ساهم بقدر كبيـــر فـــي مراجعـــة وإعادة مراجعة محتويات المذكرة.

اهدي هذه المذكرة بصفة أساسية لطلاب دبلوم وبكالوريوس الهندسة فـــي جميـــع التخصصـــات خاصة طلاب قسم الهندسة الميكانيكية ، حيث تستعرض هذه المذكرة الكثير من التطبيقـــات فـــي مجال الهندسة الميكانيكية وبالأخص في مجال ميكانيكا المواد.

وأُعبر عن شٌكري وامتناني إلى المهندس/ أسامة محمود محمد علـــي بمركـــز دانيـــة لخـــدمات الحاسوب والطباعة بمدينة عطبرة، الذي أنفق العديد من الساعات في طباعة ، مراجعة وتعـــديل وإعادة طباعة هذه المذكرة أكثر من مرة. والشكر موصول أيضاً للمهندس/ عوض علي بكـــري الذي شارك في تنسيق هذا العمل.

أخيراً ، أرجو من الله سبحانه وتعالي أن يتقبل هذا العمل المتواضع والذي آمل أن يكون ذا فائدة للقارئ.

مقدمة

إنَّ مؤلِّف هذه المذكرة وإيماناً منه بالدور العظيم والمُقدَّر للأستاذ الجامعي في إثراء حركة التأليف والتعريب والترجمة للمراجع والكتب الهندسية يأمل أن تفي هذه المذكرة بمتطلبات برامج البكالوريوس والدبلوم لطلاب الهندسة الميكانيكية ، هندسة الإنتاج او التصنيع ، الهندسة الكهربائية والهندسة المدنية حيث يُغطِّى مناهج نظرية ومختبرية في ميكانيكا المواد. تتفق هذه المذكرة لغوياً مع القاموس الهندسي الموحَّد السوداني ، وتُعد المذكرة مرجعاً في مجاله حيث يمكن أن يستفيد منه الطالب والمهندس والباحث. هذه المذكرة مقتبسة من مُذكرات مؤلفه في تدريسه لهذا المُقرر لفترة لا تقل عن أربعون عاماً.

تهدف هذه المذكرة لتأكيد أهمية دراسة ميكانيكا المصمتات أو المواد. فقد اشتملت هذه المذكرة على صياغة بعض النماذج الرياضية المستخدمة في ميكانيكا المواد واشتقاقها حتى الوصول إلى الصيَّغ النهائية المستخدمة في حل المسائل بالإضافة لإيراده بعض الأمثلة لنظم مستخدمة في التطبيقات العملية والمُختبرية.

تشتمل هذه المذكرة على أربعة فصول. يتناول الفصل الأول دراسة للعارضات الغير محدّدة إستاتيكياً التي يزيد فيها عدد ردود الأفعال المجهولة عن عدد معادلات الإتزان ويتضمن الفصل العديد من الأمثلة المحلولة والمسائل الإضافية المتنوعة.

أما الفصل الثاني فيدرس الإنحناء في المقاطع غير المتماثلة مشفوعاً بعديد الأمثلة النموذجية المحلولة وبعض التدريبات.

يتناول الفصل الثالث الإنبعاج في الأعمدة الذي يحدث نتيجة لتعرض الأعمدة الطويلة لأحمال إنضغاط محورية تؤدي إلى تقوسها وإنهيارها نتيجة لعدم الإتزان. يستعرض هذا الفصل نظرية أويلر لتحليل عدد من الأعمدة بحالات طرفية مختلفة: عمود مسماري من الطرفين، عمود مبني من الطرفين، عمود مبني من طرف وحر من الطرف الآخر، عمود مبني من طرف ومسماري

من الطرف الآخر، وعمود مسلَّط عليه حمل لا تمركزي. أيضاً يوضّح هـذا الفصـل منـاحي القصور في نظرية أويلر بالإضافة للعديد من الأمثلة المحلولة والمسائل الإضافية.

أما الفصل الرابع والأخير فيتناول بالدراسة الإسطوانات الرفيعة والسميكة مشفوعاً بالعديد مـن الأمثلة والتدريبات.

إنَّ الكاتب يأمل أن تساهم هذه المذكرة في إثراء المكتبة الجامعية داخل السودان وخارجه في هذا المجال من المعرفة ويأمل من القارئ ضرورة إرسال تغذية راجعة إن كانت هنالك ثَمَّة أخطـاء حتى يستطيع الكاتب تصويبها في الطبعة التالية للمذكرة.

والله الموفق

المؤلف

إبريل 2019م

المحتويـــات

الفصل الأول

العارضات غير المحدَّدة إستاتيكياً

(Statically Indeterminate Beams)

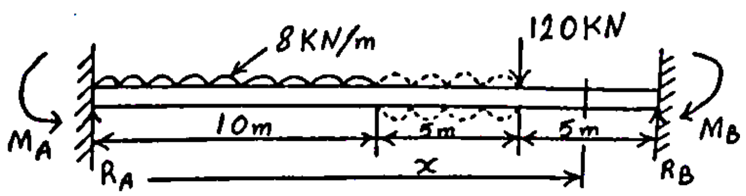
1.1 مدخل:

العارضة الغير محددة إستاتيكياً هي العارضة التي يزيد عدد ردود الأفعال المجهولة عن عدد معدلات الاتزان. العارضات الغير محددة إستاتيكياً ثلاثة أنواع وهي العارضة الوتدية المدعومة، العارضة المبنية من الطرفين، العارضة المستمرة المسنودة على أكثر من مسندين. سنركِّز الحديث على النوعين الأولين فقط.

1.2 أمثلة محلولة:

مثال(1):

عارضة لها مقطع منتظم مبنية من الطرفين بحرها 20m مُسلط عليها حمل موزَّع بانتظام 8kN/m وحمل مركَّز 120kN كما موضَّح في الرسم(1.1) أدناه. أوجد ردود الأفعال (القوى وعزوم التثبيت) ومقدار موضع الانحراف الأقصى $E = 200kN/mm^2$، $I = 500.10^6mm^4$.



الرسم(1.1)

الحل:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -M_A + R_Ax - 4x^2 + 4[x-10]^2 + 120[x-15]$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -M_Ax + R_A\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{3}[x-10]^3 + 60[x-15]^2 + A$$

$$EIv = -M_A \frac{x^2}{2} + R_A \frac{x^3}{6} - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}[x-10]^4 + 20[x-15]^3 + Ax + B$$

$x = 0,\ v = 0 \qquad \therefore B = 0$

$x = 0,\ \frac{dv}{dx} = 0 \qquad \therefore A = 0$

$x = 20m, \qquad v = \frac{dv}{dx} = 0$

$$-20M_A + 200R_A - 10667 + 1333 - 2500 = 0$$

$$-M_A + 10R_A - 514.7 = 0 \qquad (1)$$

$$-200M_A + 1333R_A - 53333 + 3333 - 2500 = 0$$

$$-M_A + 6.665R_A - 262.5 = 0 \qquad (2)$$

حل المعادلتين (1) و(2) يُعطي،

$R_A = 83.7kN, \quad M_A = 295.3kNm$

الآن،

$\therefore R_B = 116.3kN$

عزم الإنحناء عند الطرف اليمين،

$\circlearrowleft \sum M = 0$

$$M_B - M_A + 20R_A - 8\times10\times15 - 120\times5 = 0$$

بعد التعويض نحصل على،

$M_B = 421.3kNm$

دعنا نفترض أنَّ القيمة القصوى للإنحراف في مقطع حيث 15 > x > 10 والميل = صفراً

$$EI\frac{dv}{dx} = -295.3x + R_A\frac{83.7}{2} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{3}(x-10)^3 = 0$$

بعد التبسيط تصبح المعادلة،

$$1.9x^2 + 104.7x - 1333 = 0$$

والحل المطلوب $x = 10.7m$

نعوِّض في معادلة الانحراف،

$$EI\hat{v} = -295.3 \times \frac{10.7^2}{2} + \frac{83.7 \times 10.7^3}{6} - \frac{10.7^4}{3} + \frac{1}{3} \times 0.7^4 = -4184kNm$$

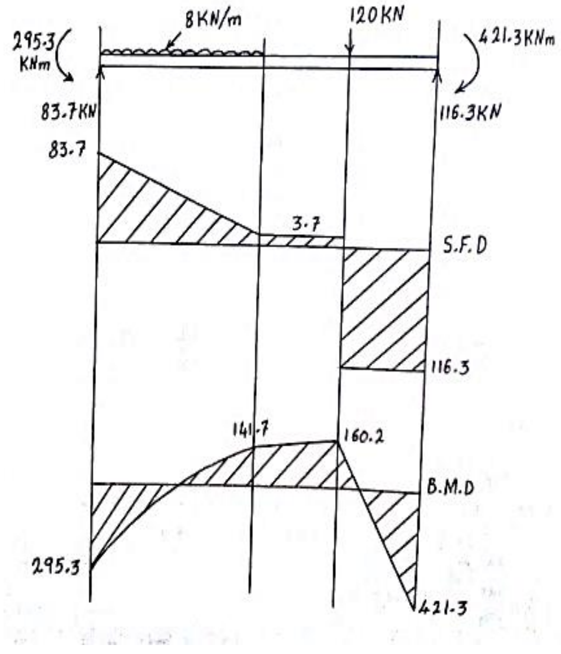
إذن الانحراف الأقصى،

$$\hat{v} = -\frac{4184.10^{12}}{200.10^3 \times 500.10^6} = -41.8mm$$

مثال(2):

أرسم مخطَّطي قوة القص وعزم الإنحناء للعرضة في المثال (1).

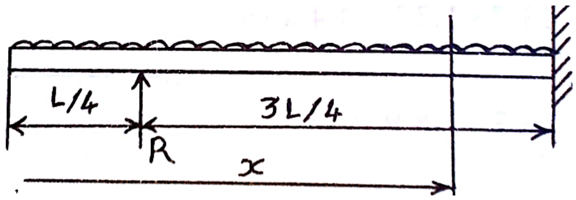
الحل:



الرسم (1.2)

مثال(3):

أوجد رد الفعل لدي الدعامة في العارضة الوتدية الموضَّحة في الرسم (1.3) أدناه.



الرسم (1.3)

الحل:

$$EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{wx^2}{2} + R\left[x - \frac{L}{4}\right]$$

$$EI\,\frac{dv}{dx} = -\frac{wx^3}{6} + \frac{R}{2}\left[x - \frac{L}{4}\right]^2 + A$$

$$x = L, \quad \frac{dv}{dx} = 0, \quad \therefore A = -\frac{9RL^2}{32}$$

$$EI\,\frac{dv}{dx} = -\frac{wx^3}{6} + \frac{R}{2}\left[x - \frac{L}{4}\right]^2 + \frac{wL^3}{6}x - \frac{9RL^2}{32}$$

$$EIv = -\frac{wx^4}{24} + \frac{R}{6}\left[x - \frac{L}{4}\right]^3 + \frac{wL^3}{6} - \frac{9RL^2}{32}x + B$$

$$x = L, \; v = 0, \quad B = \frac{wL^4}{8} - \frac{27RL^3}{32}$$

$$EIv = -\frac{wx^4}{24} + \frac{R}{6}\left[x - \frac{L}{4}\right]^3 + \frac{wL^3}{6}x - \frac{9RL^2}{32}x + \frac{wL^4}{8} - \frac{27RL^3}{32}$$

$$x = \frac{L}{4}, \; v = 0$$

$$\therefore R = \frac{341}{576}wL$$

مثال(4):

إذا كان معدَّل الحمل في العارضة في المثال (3) 10kN/m وطول العارضة 4m. أرسم

مخطَّطي قوة القص وعزم الإنحناء.

الحل:

$$w = 10kN/m, \quad L = 4m$$

$$\therefore R = \frac{341}{576} \times 10 \times 4 = 23.7kN$$

قوة القص = صفر عند 1 < x < 4،

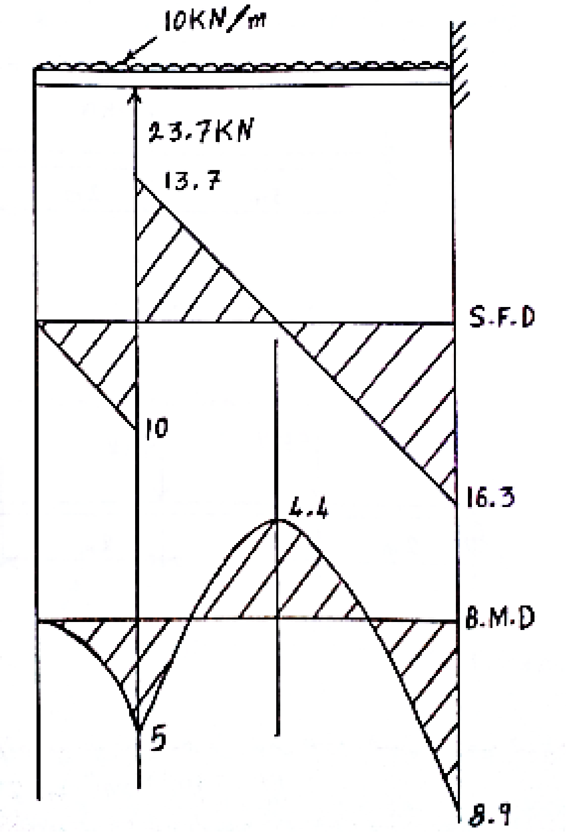
$$F = -10x + 23.7 = 0$$

$$\therefore x = 2.37m$$

$$\hat{M} = -5 \times 2.37^2 + 23.7 \times 2.37 = 4.4kNm$$

عزم الإنحناء عند الطرف المبني،

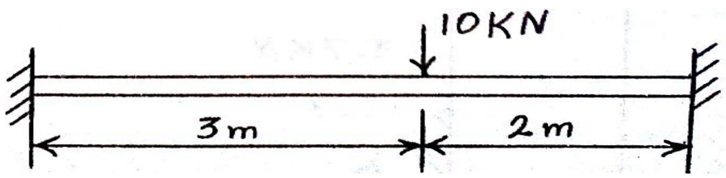
$$M = -5 \times 4^2 + 23.7 \times 3 = -8.9kNm$$



الرسم (1.4)

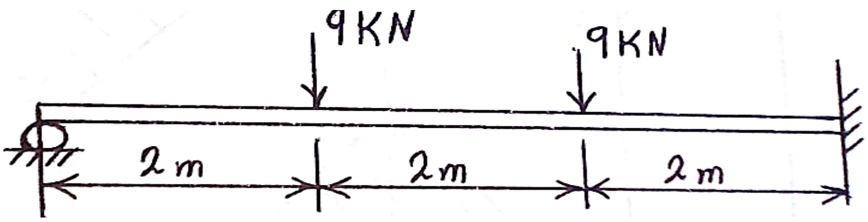
1.3 تمرين:

1. أحسب ردود الأفعال في العارضة الموضَّحة في الرسم.



Ans. (7.2kNm, 4.8kNm, 6.48kN, 3.52kN)

2. أحسب ردود الأفعال للعارضة الموضَّحة أدناه.

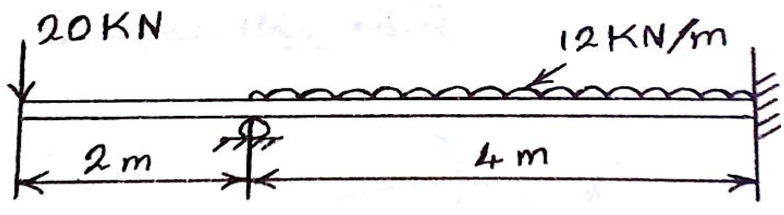


Ans. (18kN, 6kN, 12kN)

3. أوجد الانحراف عند مقطع على بعد 2m من الطرف الشمال للعارضة المذكورة في المسألة 2. خذ $EI = 7.10^{12} Nmm^2$.

Ans. (4mm)

4. أحسب ردود الأفعال للعارضة الموضَّحة في الرسم أدناه.

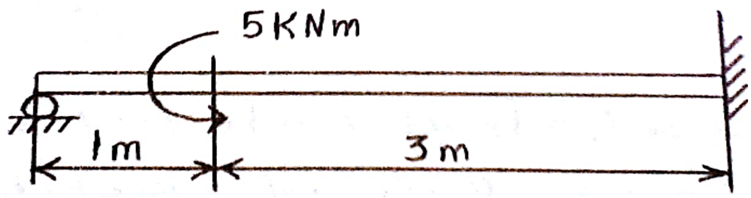


Ans. (4kNm, 53kN, 15kN)

5. أوجد الانحراف عند الطرف الحر للعارضة المذكورة في المسألة 4. خذ $EI=25MNmm^2$.

Ans. (4.1mm)

6. أحسب الانحراف عند نقطة تسليط العزم المركَّز في العارضة الموضَّحة أدناه. خذ $EI=2MNmm^2$.



Ans. (4.1mm)

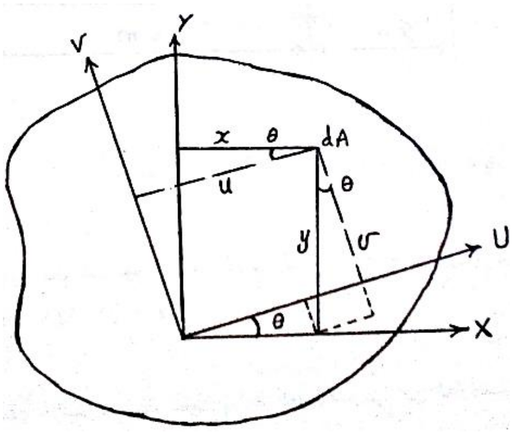
الفصل الثاني

إنحناء المقاطع الغير متماثلة

(Bending of Unsymmetrical Sections)

2.1 عزم المساحة:

من الرسم (2.1) **ادناه.**



الرسم (2.1)

معلوم أنَّ $I_{xy} = \int x\,y\ dA$, $I_y = \int x^2\,dA$, $I_x = \int y^2\,dA$. هب إننا نريد أن نعبر عن I_u و I_v و I_{uv} بدلالة I_x و I_y و I_{xy} و θ.

$$I_u = \int v^2\,dA$$

$$u = y\cos\theta - x\sin\theta$$

$$u^2 = y^2\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta$$

$$u^2 = \frac{1}{2}y^2(1+\cos 2\theta) + \frac{1}{2}x^2(1-\cos\theta) - xy\sin 2\theta$$

$$u^2 = \frac{1}{2}(y^2+x^2) + \frac{1}{2}(y^2-x^2)\cos 2\theta - xy\sin 2\theta$$

$$\therefore I_u = \frac{1}{2}(I_x+I_y) + \frac{1}{2}(I_x-I_y)\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta \qquad (1)$$

$$I_v = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) + \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right) + I_{xy}\sin 2\theta \qquad (2)$$

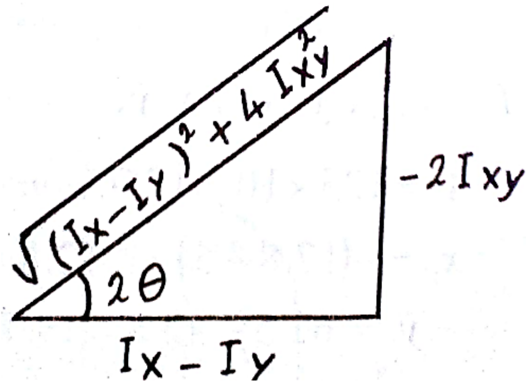
$$I_{uv} = \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right) + \sin 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

إذا كانت $I_{uv} = 0$ فإنَّ المحورين U و V يكونان محورين رئيسين.

وفي هذه الحالة،

$$\tan 2\theta = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

من المثلث في الرسم(2.2) أدناه نجد أنَّ:



الرسم(2.2)

$$\sin 2\theta = \frac{-2I_{xy}}{\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}}$$

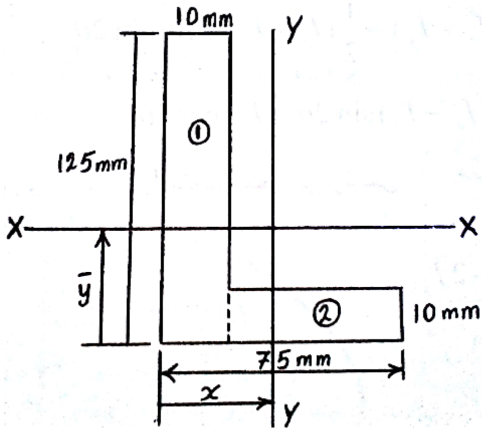
$$\cos 2\theta = \frac{I_x - I_y}{\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}}$$

عوِّض في المعادلتين (1) و(2) لتحصل على عزوم المساحة الرئيسة وهي تمثل أقصى وأدني عزم للمساحة.

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}$$

مثال(1):

المحورين x وy يمران بمركز المساحة لمقطع على شكل زاوية الموضَّح في الرسم (2.3) أدناه. أوجد I_x و I_y و I_{xy} و I_1 وI_2 حدِّد موضع المحورين الرئيسين.



الرسم (2.3)

الحل:

أولاً أوجد $\bar{x}$, $\bar{y}$، تحقق من أنها كما يلي:

$$\bar{x} = 17.8mm$$

$$\bar{y} = 42.8mm$$

ثانياً أوجد I_x و I_y ، تحقق من أنهما كما يلي:

$$I_x = 3.05.10^6 mm^2$$

$$I_y = 0.84.10^6 mm^2$$

أما مضروب عزم المساحة فإننا نحسبه من الصيغة التالية:

$$I_{xy} = A_1\bar{x}_1\,\bar{y}_1 + A_2\bar{x}_2\,\bar{y}_2$$

$$A_1 = 125 \times 10 = 1250mm^2$$

$$\bar{x}_1 = -(17.8 - 5) = -12.8mm$$

$$\bar{y}_1 = 62.5 - 42.8 = 19.7mm$$

$$A_1\bar{x}_1\,\bar{y}_1 = -315.2.10^3 mm^3$$

$$A_2 = 65\times 10 = 650 mm^2$$

$$\bar{x}_2 = 42.5 - 17.8 = 24.7 mm$$

$$\bar{y}_2 = -(42.8-5) = -37.8 mm$$

$$A_2\bar{x}_2\,\bar{y}_2 = -6.6.9.10^3 mm^3$$

$$\therefore I_{xy} = -1.27.10^6 mm^4$$

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$I_{1,2} = \frac{10^6}{2}(3.05+0.84) \pm \frac{10^6}{2}\sqrt{(3.05-0.84)^2 + 4\times 0.92^2}$$

$$I_{1,2} = 1.95.10^6 \pm 1.44.10^6$$

$$I_1 = 3.39.10^6 mm^4, \quad I_2 = 0.51.10^6 mm^4$$

$$\tan 2\theta = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{2\times 0.92.10^3}{(3.05-0.84).10^6} = 0.8326$$

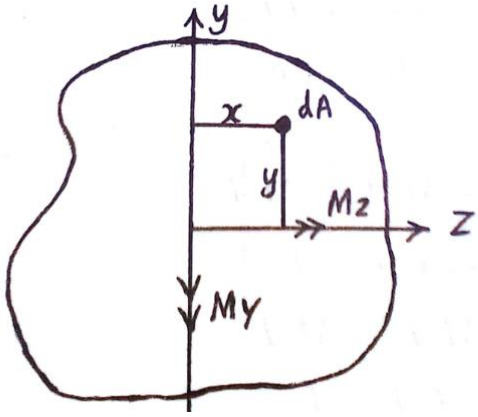
$$\tan 2\theta = 39.8^\circ$$

$$\tan\theta = 19.9^\circ$$

2.2 الإنحناء الغير متماثل:

خذ عارضة ذات مقطع عشوائي غير متماثل مُسلط عليها عزم محض كما هو موضَّح في الرسم (2.4) أدناه. المطلوب استنتاج صيغة لإجهاد الإنحناء لأي نقطة على هذا المقطع.

أولاً وبصفة عامة مهما يكن العزم المُسلط فإنه يمكن تحليله إلي مركبتين أحدهما حول المحور z والآخر حول محور y. للتسهيل سنمثل العزم بمتجه عبارة عن سهم مزدوج الرأس،



الرسم (2.4)

لشريحة طولية مساحتها dA فإنَّ الانفعال العمودي يكون كما يلي:

$$\in = \frac{y}{R_z} + \frac{z}{R_y}$$

حيث أنَّ R_y وR_z هما نصف قطر التقويسة حول المحورين y و z على التوالي وعليه يُصبح الإجهاد كما يلي:

$$\sigma = \frac{Ey}{R_z} + \frac{Ez}{R_y}$$

لاحظ أنَّ ناتج القوى على المقطع = صفر.

$$\therefore \int \sigma \; dA$$

$$\frac{E}{R_z}\int y \; dA + \frac{E}{R_y}\int z \; dA = 0$$

وهذا لا يتحقق إلاّ إذا كان،

$$\int y \; dA + \int z \; dA = 0$$

وهذا بدوره يعني أنَّ المحورين z و y لا يمران بمركز المساحة.

أما العزم المُسلَّط فيمكن حسابه من،

$$M_z = \int \sigma_y \; dA = \frac{E}{R_z}\int y^2 \; dA + \frac{E}{R_y}\int y\,z \; dA$$

ولكن،

$$\int y^2 \ dA = I_z , \ \int y\, z \ dA = I_{yz}$$

$$\therefore M_z = \frac{EI_z}{R_z} + \frac{EI_{yz}}{R_y} \qquad (1)$$

وبالمثل،

$$-M_y = \int \sigma_y z \ dA$$

وبعد التعويض نحصل على،

$$-M_y = \frac{EI_{yz}}{R_z} + \frac{EI_y}{R_y} \qquad (2)$$

ويمكن حل المعادلتين (1) و(2) لنحصل على،

$$\frac{E}{R_y} = \frac{-M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I^2{}_{yz}}$$

$$\frac{E}{R_z} = \frac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{I_y I_z - I^2{}_{yz}}$$

والآن عوِّض في المعادلة،

$$\sigma = \frac{E}{R_z} y + \frac{E}{R_y} z$$

لنحصل علي،

$$\sigma = \frac{\left(M_z I_z + M_y I_{yz}\right) y - \left(M_y I_z + M_z I_{yz}\right) z}{I_y I_z - I^2{}_{yz}} \qquad (3)$$

في المعادلة (3) إذا كان المقطع متماثل حول المحور الرأسي I_{yz}=0 وبالتالي،

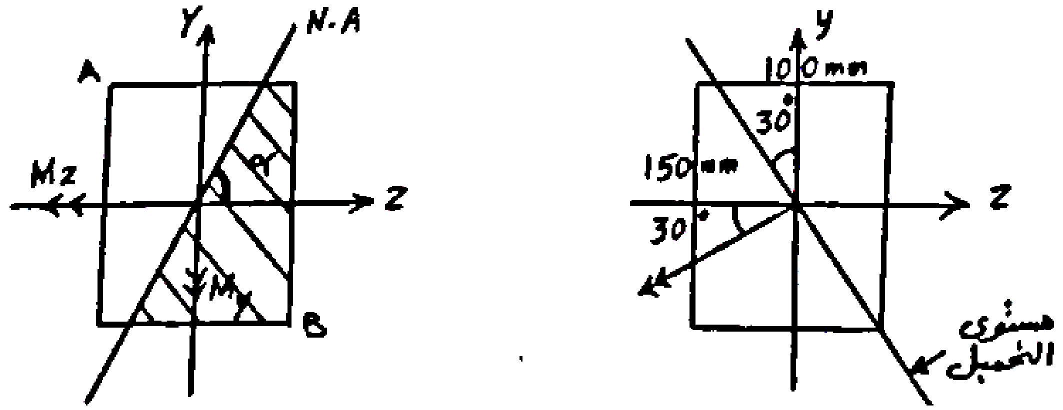
$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z$$

إذا كان العزم مُسلَّط حول المحور z لوحده بمعني أنَّ $M_y = 0$، فإنَّ صيغة الإجهاد تصبح ما هو معروف لدينا سلفاً،

$$\sigma = \frac{M}{I} y$$

مثال(2):

عارضة مقطعها مستطيل مُسلط عليها حمل يؤدي إلي عزم إنحناء 3kNm في مستوى يميل 30° لمحور z. أوجد القيمة القصوى لإجهاد الشد وإجهاد الضغط في العارضة كما هو موضَّح في الرسم (2.5) أدناه (أنظر المقطع).



الرسم (2.5)

الحل:

$$M_y = -3\sin 30° = -1.5kNm$$

$$M_z = -3\cos 30° = -2.6kNm$$

$$I_y = \frac{150 \times 100^3}{12} = 12.5.10^6 mm^4$$

$$I_z = \frac{100 \times 150^3}{12} = 28.1.10^6 mm^4$$

نتيجة التماثل،

$$I_{yz} = 0$$

الإجهاد،

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

أولاً أوجد حول محور التعادل σ = 0

$$\therefore \tan 2\alpha = \frac{y}{z} = \frac{M_y}{M_z}\frac{I_z}{I_y}$$

$$\tan 2\alpha = \left(\frac{-1.5}{-2.6}\right) \times \frac{28.1.10^6}{12.51.10^6} = 1.2969$$

$$\alpha = 52.4°$$

الجزء المظلَّل في حالة شد والآخر في حالة ضغط. إذن النقطة A تتعرَّض لأقصى إجهاد ضغط بينما النقطة B تتعرَّض لأقصى إجهاد شد.

عند النقطة A،

$$y = 75mm, \quad z = -50mm$$

$$\therefore \sigma = \frac{-2.6.10^6 \times 75}{28.1.10^6} + \frac{1.5.10^6 \times (-50)}{12.5.10^6}$$

$$\sigma_A = -12.9 N/mm^2$$

عند النقطة B،

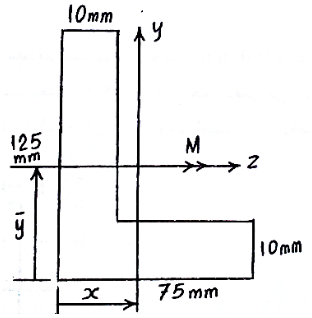
$$y = -75mm, \quad z = 50mm$$

$$\therefore \sigma = \frac{-2.6.10^6 \times (-75)}{28.1.10^6} + \frac{1.5.10^6 \times (50)}{12.5.10^6}$$

$$\sigma_B = 12.9 N/mm^2$$

مثال(3):

أوجد الإجهاد الأقصى وإجهاد الضغط الأقصى للمقطع الموضَّح في الرسم (2.6) أدناه عندما يتعرَّض لزم إنحناء M =2kNm.



الرسم(2.6)

الحل:

هذا المقطع مرَّ علينا في المثال (1) حيث وجدنا أنَّ،

$$\bar{z} = 17.8mm, \bar{y}42.8mm,\ I_y = 0.84.10^6,\ I_z = 3.05.10^6, I_{yz} = -0.92.10^6$$

من معطيات المسألة نجد أنَّ،

$$M_y = 0, \quad M_z = 2kNm$$

$$\sigma = \frac{M_z\left(I_y y - I_z z\right)}{I_y I_z - I^2{}_{yx}}$$

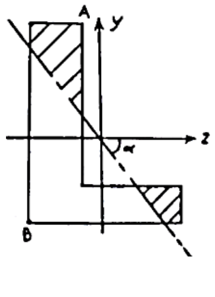
لتحديد محور التعادل نضع σ = 0،

$$\therefore \tan 2\alpha = \frac{y}{z} = \frac{I_{yz}}{I_y}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{-0.92}{0.84} = -1.09529$$

$$\therefore \alpha == -47.6°$$

الجزء المظلَّل مشدود والآخر مضغوط ، كما هو موضَّح في الرسم (2.7) أدناه



الرسم (2.7)

عند النقطة A،

$$y = 82.2mm, \quad z = -17.8mm$$

$$\sigma_A = \frac{-2.10^6(0.84 \times 82.2 - 0.92 \times 17.8)10^6}{0.84.10^6 \times 3.05.10^6 - 0.92^2 \times 10^2}$$

$$\sigma_A = 71.1N/mm^2$$

عند النقطة B،

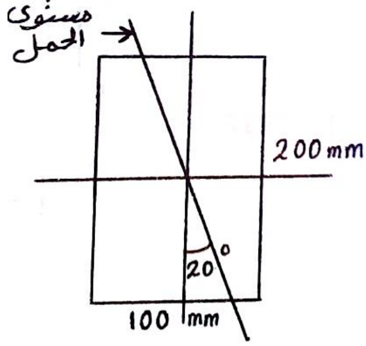
$$y = -42.8mm, \quad z = 17.8mm$$

$$\sigma_B = \frac{2.10^6(-0.84 \times 42.8 - 0.92 \times 17.8)10^6}{0.84.10^6 \times 3.05.10^6 - 0.92^2 \times 10^2}$$

$$\sigma_B = -61.0N/mm^2$$

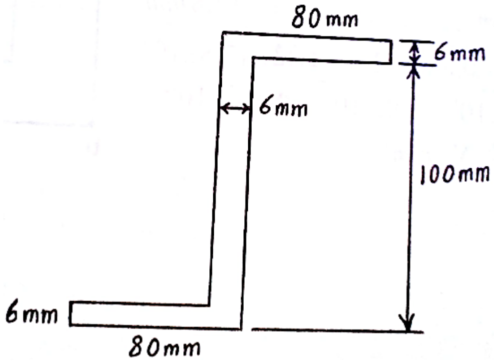
2.3 تمرين:

1. عارضة وتدية خشبية طولها 4m ومقطعها مستطيل 100mm وعمقه 200mm خضعت لحمل موزَّع بانتظام معدَّله 400N/m. الحمل الذي يعمل على مستوى يميل 20^o لمحور التماثل الرأسي للمقطع (أنظر الرسم). أوجد إجهاد الشد الأقصى في العارضة.



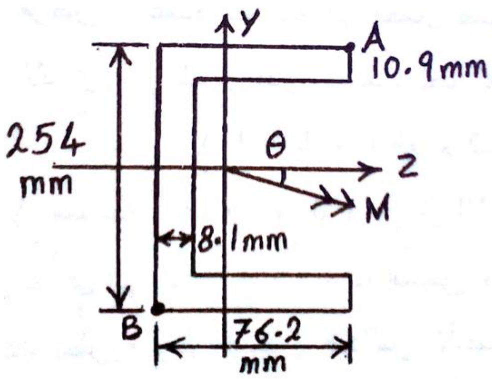
Ans. (7.8N/mm^2)

2. مقطع صلب إنشاءات له الأبعاد الموضَّحة في الرسم أدناه يستخدم كعارضة مسنودة إسناد بسيط طولها 5m تخضع لحمل موزَّع بانتظام في المستوي الرأسي معدّله 750N/m بالإضافة إلي حمل مركَّز في الوسط مقداره 500N. أوجد إجهاد الشد الأقصى في العارضة .



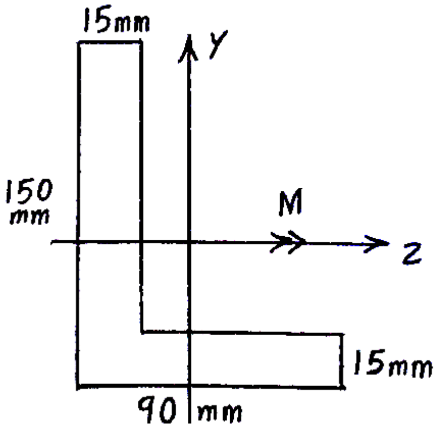
Ans. (213N/mm^2)

3. مقطع على شكل مجرى يتعرَّض لعزم إنحناء M = 1.7kNm له متجه يميل $\theta = 10^{o}$ لمحور z (أنظر الرسم أدناه). أحسب الإجهاد عند النقطتين A وB.



Ans. (9.7N/mm^2, 16.7N/mm^2)

4. مقطع على شكل زاوية (أنظر الرسم) يخضع لعزم إنحناء M = 1kNm له متجه على طول المحور z. أحسب إجهاد الشد الأقصى وإجهاد الضغط الأقصى.



Ans. ($14.8 N/mm^2$, $14.3 N/mm^2$)

الفصل الثالث

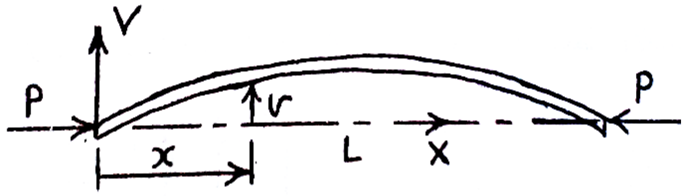
انبعاج الأعمدة

(Buckling of Column)

3.1 مدخل:

يحدث الانبعاج عندما تتعرض الأعمدة الطويلة إلي أحمال ضغط محورية تؤدي إلي تقويسها وإنهيارها نتيجة لعدم الإتزان. وللتميز بين الأعمدة الطويلة والقصيرة نستخدم نسبة النحافة r حيث أنَّ $r = L/k$ حيث أنَّ $k = I/A$ و I العزم الثاني للمساحة وهو أصغر عزم مساحة للمقطع و A مساحة المقطع. والواضح أنَّ الأعمدة الطويلة تنهار تحت أحمال أصغر من الأحمال التي تؤدي إلي انهيارها في حالة السحق، وهي طريقة انهيار الأعمدة القصيرة. يمكن استخدام نظرية اويلر لتحليل عدد من الأعمدة بحالات طرفية مختلفة.

1. عمود مسماري من الطرفين:



الرسم(3.1)

على افتراض أنَّ العمود مستقيم والحمل محوري. من الرسم (3.1) أعلاه نحصل على،

$$EI = \frac{d^2v}{dx^2} = M = -Pv$$

$$EI\,\frac{d^2v}{dx^2} + \alpha^2 v = 0, \qquad \alpha^2 = \frac{P}{EI}$$

الحل هو:

$$v = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x$$

$$x = 0, \quad v = 0, \quad \therefore B = 0$$

$$x = L, \quad v = 0, \quad \therefore A = \sin\alpha L = 0$$

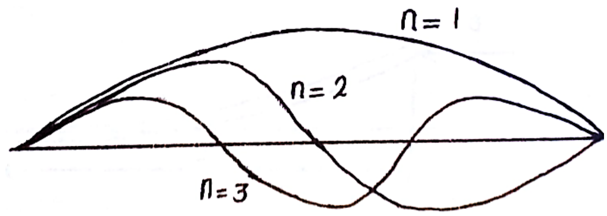
$$A \neq 0 \quad \therefore \sin\alpha L = 0 \ , \ \alpha L = n\pi \qquad (n = 1,2,...)$$

بعد التعويض عن α نحصل على،

$$P_c = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}$$

n تشير إلي شكل العارضة المنهارة كما موضَّح في الرسم (3.2) أدناه. بالطبع لن يتجاوز العمود حالة n=1 لأنَّه سيكون قد انهار قبلاً، وعليه فإنَّ حمل الانهيار أو الحمل الحرج أو حمل أويلر سيكون،

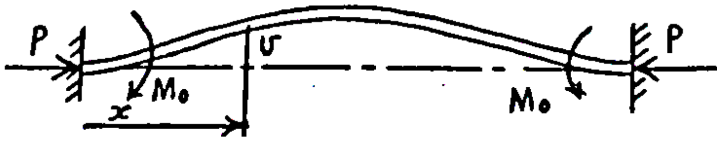
$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$



الرسم (3.2)

هذا الكلام يعني أنَّ العمود سيظل مستقيماً وسالماً ما دام الحمل أقل من P_c. وعندما يُصبح الحمل $P = P_c$، فإنَّ العمود سينحرف ويتسارع الانحراف حتي يتم الانهيار.

2. عمود مبني من الطرفين:



الرسم (3.3)

$$EI = \frac{d^2v}{dx^2} = -Pv + M_o$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}+\alpha^2 v=\frac{M_o}{EI}, \qquad \alpha^2=\frac{P}{EI}$$

$$v=A\sin\alpha x+B\cos\alpha x+\frac{M_o}{EI\alpha^2}$$

$$x=0, \quad v=0, \quad \therefore B=\frac{M_o}{EI\alpha^2}=-\frac{M}{P}$$

$$x=0 \qquad \frac{dv}{dx}=0 \ , \ A=0$$

$$v=\frac{M}{P}(1-\cos\alpha x)$$

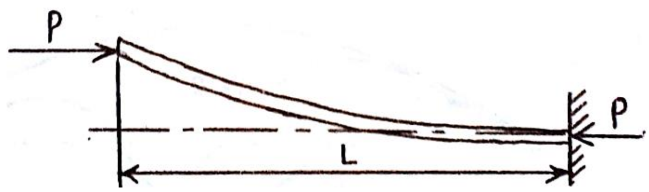
$$x=L \qquad v=0 \qquad \therefore \cos\alpha L=1$$

$$\therefore \alpha L=2\pi$$

وبتعويض عن قيمة α نحصل على،

$$P_c=\frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

3. عمود مبني من طرف وحر من الطرف الآخر:

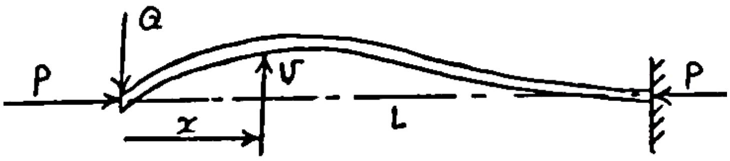


الرسم (3.4)

حاول أن تستنتج لوحدك القانون التالي:

$$P_c=\frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

4. عمود مبني من طرف ومسماري من الطرف الآخر:



الرسم (3.5)

$$EI=\frac{d^2v}{dx^2}=-Pv+Qx$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}+\alpha^2 v=\frac{Qx}{EI}, \qquad \alpha^2=\frac{P}{EI}$$

$$v=A\sin\alpha x+B\cos\alpha x-\frac{Qx}{EI\alpha^2}$$

$$x=0, \quad v=0, \quad \therefore B=0$$

$$x=L \qquad v=0 \therefore A\sin\alpha L=\frac{QL}{P} \tag{1}$$

$$x=L \qquad \frac{dv}{dx}=0 \therefore A\cos\alpha L=\frac{QL}{P} \tag{2}$$

(1)/(2)

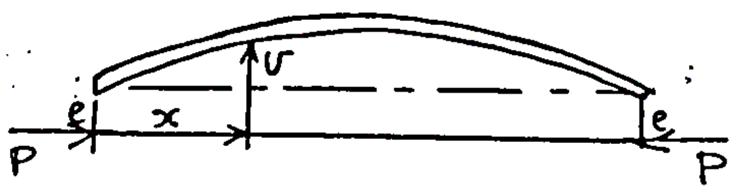
$$\tan\alpha L=\alpha L$$

$$\alpha L=4.49$$

$$P_c=\frac{20.1EI}{L^2}=\frac{2.05\pi^2 EI}{L^2}$$

في كل الأمثلة السابقة تم تحليل عمدان مستقيمة ومُسلط عليها أحمال محورية. في الواقع تلك حالات مثالية فالعمود قل ما يكون كامل الاستقامة كما أنَّ الحمل نادراً ما يكون محورياً. ولهذا سنقوم بتحليل أعمدة مُسلط عليها أحمال لا تمركزية وسنقوم بتضمين التقوس الأولي في التحليل.

5. عمود مُسلط عليه حمل لا تمركزي:



الرسم (3.6)

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}=-Pv$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}+\alpha^2 v=0$$

$$v = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x$$

$$x = 0, \quad v = 0, \quad \therefore B = e$$

$$x = L/2, \quad v = \frac{dv}{dx}, \quad \therefore A = e\tan\frac{\alpha L}{2}$$

$$\therefore v = e\left[\tan\frac{\alpha L}{2}\sin\alpha x + \cos\alpha x\right]$$

لاحظ أنَّ الحمل اللاتمركزي يسبب انحرافاً في كل الأحوال لا في حالة الحمل الحرج فقط. إن الانحراف يُصبح لا نهائياً عندما يكون،

$$\tan\frac{\alpha L}{2} = \infty, \qquad \therefore \alpha L = \pi$$

أي أنَّ حمل الانهيار،

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

ولكن في هذه الحالة ولوجود إجهادات ضغط فإنَّ العمود لا ينهار نتيجة الانبعاج.

الانحراف الأقصى في الوسط $x = \frac{L}{2}$،

$$\hat{v} = e\left[\tan\frac{\alpha L}{2}\sin\frac{\alpha L}{2} + \cos\frac{\alpha L}{2}\right] = e\sec\frac{\alpha L}{2}$$

عزم الانحناء الأقصى،

$$\hat{M} = P\hat{v} = P_c\sec\frac{\alpha L}{2}$$

والإجهاد الأقصى يتم الحصول عليه بجمع إجهادي الانحناء والإجهاد المباشر،

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{z} = \frac{P}{A} + \frac{P\hat{v}}{z}$$

من النادر أن يخلو عمود من درجة ما من التقوس. إذا أخذنا نصف قطر التقويسة الأولي،

$$R_o = 1\Big/\frac{d^2v}{dx^2}$$

وإذا استخدمنا الصيغة التالية،

$$EI = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_o} \right) = M$$

نحصل على،

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = M + EI \frac{d^2 v_o}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \alpha^2 y = \frac{d^2 v_o}{dx^2}$$

سنفترض أنَّ التقوس الأولي $v_o = c \sin \frac{\pi x}{L}$ وهي تعنى بالحالات الطرفية، وتجعل القيمة القصوى للانحراف c وعليه تُصبح المعادلة،

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \alpha^2 v = -\frac{c\pi^2}{L} \sin \frac{\pi x}{L}$$

والحل الكامل،

$$v = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - \frac{c\pi^2 / L^2}{-\frac{\pi^2}{L^2} - \alpha^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$x = 0, \quad v = 0, \quad \therefore B = 0$$

$$x = \frac{L}{2}, \quad \frac{dv}{dx} = 0, \quad \therefore A = 0$$

$$\therefore v = \frac{c\pi^2 / L^2}{\pi^2 / L^2 - \alpha^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$v = \frac{c\, P_e}{P_e - P} \sin \frac{\pi x}{L}, \quad P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$\hat{M} = P \hat{v} = \frac{c\, P\, P_e}{P_e - P}$$

3.2 نواحي القصور في نظرية اويلر:

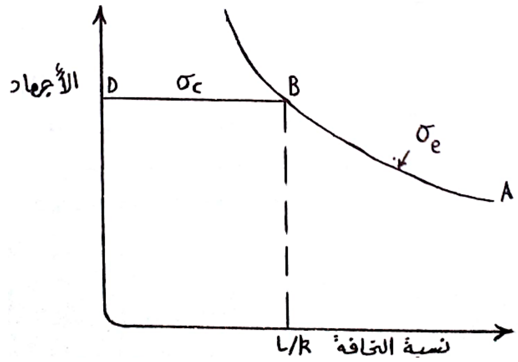
في الواقع لا يوجد عمود مستقيم كامل الاستقامة أصلاً ثم أنَّ الحمل المحوري هو حالة مثالية. فالحمل عادة يكون لا تمركزياً ولكن قيمة اللاتمركز تكون مجهولة. كما أنَّه إذا سلمنا بأنَّ العمود

مقوس فإنَّ التقوس يكون مجهولاً. وبالتالي فإنَّ نظرية اويلر تبدو وكأنها عديمة الفائدة. أضف إلي ذلك هنالك منطقة يتداخل فيها العمود الطويل والعمود القصير ويصعُب فيها التحقق من إذا كان عمود معين سينهار نتيجة السحق أو الانبعاج.

لنأخذ المعادلة التالية:

$$\sigma_e = \frac{P_e}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} = \frac{\pi^2 E}{(L/k)^2}$$

منحني σ_e ضد (L/k) هو كما موضَّح في الرسم(3.7).



الرسم (3.7)

بالنسبة للصلب $\sigma_c = 230N/mm^2$، $E = 205kN/mm^2$،

$$\frac{L}{k} = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_c}} = \pi\sqrt{\frac{205.10^3}{320}} \approx 80$$

بسبب نواحي القصور التي أوردناها في صيغة اويلر، نستخدم صيغ تجريبية تأخذ في الاعتبار تقوس العمود واللاتمركز في الحمل. ومن الصيغ:

1. صيغة رانكين:

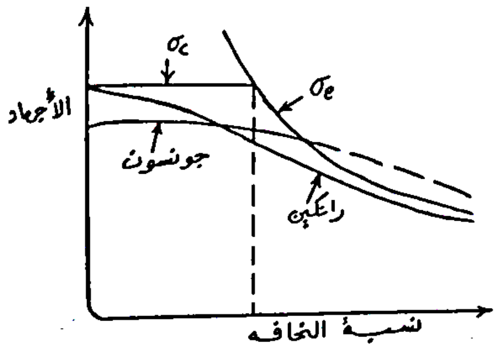
$$P = \frac{\sigma_c A}{1 + a(L/k)^2}$$

حيث a ثابت يعتمد على المادة المصنوع منها العمود والحالة الطرفية، وهذا الثابت متوفر في جدول.

2. صيغة جونسون:

$$P = \sigma_c\, A\left[1 - b\left(L/k\right)^2\right]$$

حيث b ثابت.



الرسم (3.8)

3.3 أمثلة محلولة:

مثال(1):

عمود طوله 1m ومقطعه 12.5mm×4.8mm سُلط عليه حمل ضغط محوري أدي إلي انبعاجه. باستخدام صيغة اويلر، أوجد الانحراف الأقصى قبل أن يصل الإجهاد إجهاد الخضوع $280N/mm^2$، $E = 72kN/mm^2$.

الحل:

أصغر عزم ثاني للمقطع،

$$I = \frac{12.5 \times 4.8^3}{12} = 115.2mm^4$$

مساحة المقطع،

$$A = 12.5 \times 4.8 = 60mm^2$$

الحمل الحرج،

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 \times 72.10^3 \times 115.3}{10^6} = 82N$$

عزم الانحناء الأقصى في الوسط،

$$\hat{M} = P_c \hat{v} = 82\hat{v}$$

حيث $\hat{v}$ هي الانحراف الأقصى.

الإجهاد الأقصى هو مجموع الإجهاد المباشر وإجهاد الإنحناء،

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{I}$$

$$\therefore 280 = \frac{82}{60} + \frac{82\hat{v} \times 2.4}{115.2}$$

$$\therefore \hat{v} = 163mm$$

مثال(2):

عمود من الصلب على شكل ماسورة قطرها الخارجي 60mm والداخلي 48mm طول العمود 2.2m وطرفاه مسماريان، والحمل موازي لمحور العمود. أوجد أقصى لا تمركز لكي يصبح حمل الاعاقة 0.75 من حمل اويلر. إجهاد الخضوع $310N/mm^2$، $E = 207kN/mm^2$.

الحل:

$$I = \frac{\pi}{64}\left(60^4 - 48^4\right) = 37.6.10^4 mm^4$$

$$A = \frac{\pi}{4}\left(60^2 - 48^2\right) = 1018mm^2$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 \times 207.10^3 \times 37.6.10^4}{2200^2} N = 158kN$$

إذن حمل الاعاقة $P = 0.75P_c = 118.5kN$

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}} = \sqrt{\frac{118.5.10^3}{207.10^3 \times 37.6.10^4}} = 12.3.10^{-4}$$

$$\sec\frac{\alpha L}{2} = \sec\left(\frac{12.3.10^{-4} \times 2200}{2}\right) = \sec 1.36$$

$$= 4.779$$

$$\hat{M} = P\,h \sec\frac{\alpha L}{2} = 118.5.10^3 h \times 4.77 = 566.10^3 h$$

(h هي اللاتمركز).

الاجهاد المباشر،

$$\sigma_d = \frac{P}{A} = \frac{118.5.10^3}{1018} = 116.4 N/mm^2$$

إجهاد الإنحناء،

$$\sigma_b = \frac{\hat{M}}{I}\hat{y} = \frac{655.10^3 h}{37.6.10^4} \times 30 = 45.2h\left(N/mm^2\right)$$

الإجهاد الكلي،

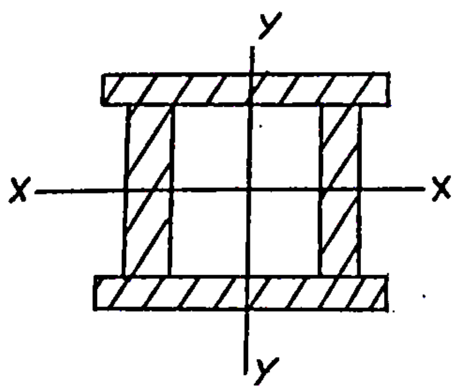
$$\sigma = \sigma_d + \sigma_b$$

$$310 = 116.4 + 45.2h$$

$$\therefore h = 4.28mm$$

مثال(3):

عمود طوله 6m مقيَّد الطرفين ومقطعه كما موضَّح في الرسم(3.9) أدناه. استخدم صيغة رانكين لإيجاد حمل الضغط المسموح به إذا كان عامل السلامة 3.5. خذ إجهاد الخضوع في حالة الضغط $\sigma_c = 320\,N/mm^2$ و الثابت a = 1/30000.



الرسم(3.9)

الحل:

المعطيات:

$$I_x = 108.5.10^6 mm^4$$

$$I_y = 65.7.10^6 mm^4$$

$$A = 122.5.10^2 mm^2$$

$$\sigma_w = 320/3.5 = 91.4 N/mm^2$$

أقل قيمة لــــــ k نحصل عليها من الآتي:

$$Ak = Iy$$

$$122.5.10^2 k = 65.7.10^6$$

$$\therefore k = 73.2mm$$

$$\left(\frac{L}{k}\right)^2 = \left(\frac{6.10^3}{73.2}\right)^2 = 6712$$

صيغة رانكين،

$$P = \frac{\sigma_c A}{1 + a(L/k)^2}$$

$$P = \frac{91.4 \times 122.5.10^2}{1 + 6712/30.10} N = 915kN$$

مثال(4):

عمود مجوف مقيَّد الطرفين مُسلَّط عليه حمل 1MN. إذا كان طول العمود 5m وقطره الخارجي 250mm، أوجد القطر الداخلي باستخدام صيغة رانكين. الثابت a = 1/6400 إجهاد التشغيل $80N/mm^2$.

الحل:

إذا كان القطر الداخلي d mm،

$$A = \frac{\pi}{4}\left(250^2 - d^2\right)$$

$$I = \frac{\pi}{64}\left(250^4 - d^4\right)$$

$$k^2 = \frac{I}{A} = \frac{\pi}{64}\left(250^4 - d^4\right) \times \frac{4}{\left(250^2 - d^2\right)}$$

$$\therefore k^2 = \frac{1}{16}\left(250^2 + d^2\right)$$

$$\left(\frac{L}{k}\right)^2 = \frac{25.10^3 \times 16}{250^2 + d^2} = \frac{62.5.10^3}{250^2 + d^2}$$

$$\mathrm{P} = \frac{\sigma_c \mathrm{A}}{1 + \mathrm{a}(\mathrm{L}/\mathrm{k})^2}$$

$$P = \frac{80 \times \pi / 4\left(250^2 - d^2\right)}{1 + 62.5.10^3\left(250^2 - d^2\right)}$$

والتي يمكن تبسيطها كما يلي،

$$P = \frac{20\left(250^4 - d^4\right)}{125.10^3 + d^2} = 10^6$$

وبعد قليل من المعالجة نحصل على،

$$d^4 + 15.9.10^3 d^2 - 1916 = 0$$

$$d^2 = 36.6.10^3 mm^2$$

$$d = 191mm$$

3.4 تمرين:

1. عمود طوله L وطرفاه مبنيان في مادة توفر عزم تثبيت $M_o = k\theta$ حيث k ثابت و θ زاوية الدوران في الطرف. برهن أنَّ حمل الانبعاج يمكن الحصول عليه من الآتي:

$\tan\frac{\alpha L}{2} = -\frac{P}{\alpha k}$ و $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$.

إذا كان العمود مسماري من الطرفين وطوله 3.05m فإنَّ حمل الانبعاج يكون 10kN.

برهن أنَّ حمل الانبعاج سيتضاعف تقريباً إذا كان الطرفان مقيدان وتوفر المادة عزم التثبيت 180Nm/rad.

2. عمود رأسي كان مستقيماً عندما سُلِّط عليه حمل لا تمركزي P واللاتمركز e. إذا كان الانبعاج في الوسط مُنع بواسطة قوة أفقية F، برهن الآتي:

$$F = \frac{2P_e\left(1 - \sec\alpha\,\frac{\alpha L}{2}\right)}{\frac{L}{2} - \frac{1}{a}\tan\frac{\alpha L}{2}}$$

3. عمود طويل منتظم المقطع كان مستقيماً في البدء عندما سُلِّط عليه حمل ضغط من الطرفين وعلى نفس الجانب من خط الوسط ولكن كان اللاتمركز على أحد الطرفين ضعف اللاتمركز في الطرف الآخر.

إذا كان طول العمود L والحمل P، برهن أنَّ أقصى إجهاد إنحناء يحدث عند مقطع يبعد x من الطرف ذي اللاتمركز الأصغر حيث أنَّ:

$$\tan mx = \frac{2 - \cos mL}{\sin mL}, \qquad m = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

إذا كان L = 0.76m وقطر العمود 25mm، أحسب اللاتمركز والذي ينتج إجهاد أقصى $310N/mm^2$ حيث أنَّ P = 35kN، $E = 200kN/mm^2$.

Ans. (6mm, 3mm)

4. عمود طويل كان مستقيماً في بادئ الأمر بينما أحد طرفيه مثبت بقوة والطرف الآخر حر. تم تسليط حمل لا تمركزي على الطرف الحر، وكان خط عمل الحمل موازى لمحور العمود. استنتج صيغة لانحراف الطرف الحر من الوضع الأصلي.

أوجد الانحراف وإجهاد القص الأقصى لعمود صلب تحت هذه الظروف: الطول 25mm والقطر الخارجي 50mm والداخلي 25mm، الحمل 3500N واللاتمركز 75mm. $E=206kN/mm^2$.

Ans. ($31N/mm^2$, 25mm, $e(\sec \alpha L - 1)$)

5. عمود دائري مجوف طرفاه مسماريان وطوله 2.44m وقطره الخارجي 101mm والداخلي 89mm. قبل التحميل كان العمود مقوساً وأقصى انحراف له 4.5mm. على افتراض أنَّ خط الوسط جيبي، أوجد الإجهاد الأقصى الذي ينتج منه حمل ضغط محوري مقداره 10kN. $E = 205kN/mm^2$.

Ans. ($6.3N/mm^2$)

6. برهن أنَّه إذا كان هنالك عمود مُقوس وطرفاه مسماريان حيث أنَّ الانحراف الأولي وفق الصيغة التالية:

$$v_o = \frac{4cx}{L^2}(1-x)$$

برهن أنَّ إجهاد الضغط الأقصى الذي ينجم من حمل P:

$$\sigma_c = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ch}{k^2}\frac{8P_c}{\pi^2 P}\left(\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_c}} - 1\right)\right]$$

حيث أنَّ A مساحة المقطع، c الانحراف الأولي في الوسط، P_c حمل اويلر، k=I/A ذات المعروف، وh مسافة أكثر الشرائح بعداً عن محور التعادل.

7. قارن حمل الاعاقة حسب صيغتي اويلر ورانكين لأنبوب طوله 2.3m وقطره الخارجي والداخلي 38mm و33mm على التوالي، وذلك عندما يكون طرفاه مسماريان. خذ

إجهاد الخضوع $320N/mm^2$ وثابت رانكين 1/7500، $E = 200kN/mm^2$. ما هو الطول الذي تمتنع فيه صيغة رانكين عن التطبيق.

Ans. (1m, 17.1kN, 17kN)

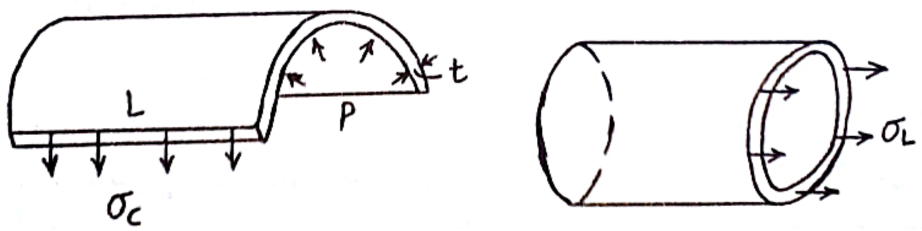
الفصل الرابع

الأسطوانات

(Cylinders)

4.1 الأسطوانات الرقيقة:

من أمثلة الأسطوانات الرقيقة صهاريج المياه والوقود وأنابيب الغلايات. هنالك نوعان من الإجهادات تنتج من تأثير الضغط الداخلي كما يوضِّح الرسم (4.1) أدناه.



الرسم(4.1)

والإجهادان المعنيان هما الإجهاد المحيطي σ_c والإجهاد الطولي σ_L في حالة تكون الأسطوانة مغلقة من الجانبين.

استنتج لوحدك الآتي:

$$\sigma_c = \frac{Pr}{t}, \qquad \sigma_L = \frac{Pr}{2t}$$

حيث أنَّ r نصف قطر الأسطوانة، و t السمك.

مثال(1):

أسطوانة هواء مضغوط قطرها 600mm والضغط الداخلي $3.5 N/mm^2$. إذا كانت الأسطوانة مصنوعة من صلب له إجهاد خضوع $250 N/mm^2$ بينما عامل السلامة 2.5، أحسب سمك الجدار. تجاهل التأثيرات المحلية عند نقاط اتصال الأسطوانة بالغطاء.

الحل:

لأنَّ الأسطوانة مغلقة من الطرفين، هنالك إجهاد محيطي وإجهاد طولي. ونسبة لأنَّ الإجهاد المحيطي ضعف الإجهاد الطولي، فإنَّ الإجهاد المحيطي سيكون العامل الحاسم لانهيار الأسطوانة، وعليه إذن يتم التصميم.

إجهاد التشغيل،

$$\sigma_w = \frac{250}{2.5} = 100 N / mm^2$$

$$\sigma_w = \frac{\Pr}{t}$$

$$100 = \frac{3.5 \times 300}{t}, \quad \therefore t = 14.7 mm$$

4.2 الأسطوانات السميكة:

إذا كان سمك الأسطوانة $t < d < d/20$ حيث أنَّ d قطر الأسطوانة، فإنَّ الأسطوانة يمكن أن تصف بأنها سميكة، وفي هذه الحالة فإن الإجهادات الرئيسة هي الإجهاد المحيطي σ_h والإجهاد الطولي σ_L كما في الأسطوانات الرقيقة بالإضافة إلي الإجهاد القطري σ_r. في هذه الحالة نجد أنَّ الإجهادين المحيطي والقطري يتغيران عبر السمك.

حاول أن تستنتج لوحدك الصيغ التالية:

$$\sigma_v = a - \frac{b}{r^2}$$

$$\sigma_h = a + \frac{b}{r^2}$$

$$\sigma_L = \frac{\Pr_2^2}{r_1^2 - r_2^2}$$

حيث أنَّ r_1 وr_2 هما نصفا القطران الخارجي والداخلي على التوالي. a وb ثابتان.

مثال(2):

أسطوانة هيدروليك قطرها الداخلي 60mm. أوجد السمك المطلوب لتتحمل الأسطوانة ضغط داخلي $40N/mm^2$ بحيث لا يتجاوز إجهاد الشد الأقصى $60N/mm^2$ وإجهاد القص الأقصى $45N/mm^2$.

الحل:

(أ) إجهاد الشد الأقصى،

$$\sigma_v = a - \frac{b}{r^2}$$

$$r = 30mm, \; \sigma_v = -40N/mm^2$$

$$r = r_1, \qquad \sigma_r = 0$$

$$-40 = a - \frac{b}{30^2} \qquad (1)$$

$$0 = a - \frac{b}{r_1^2} \qquad (2)$$

$$r = 30mm, \qquad \sigma_h = 60N/mm^2$$

$$\therefore 60 = a + \frac{b}{30^2} \qquad (3)$$

$$(1)+(2) \therefore a = 10$$

عوّض في (1) لتحصل على $b = 45.10^3$.

وأخيراً عوّض في المعادلة (2) لتحصل على r = 67.1mm.

السمك المطلوب t،

$$t = 67.1 - 30 = 37.1mm$$

(ب) إجهاد القص الأقصى:

$$\hat{\tau} = \frac{1}{2}(\sigma_h - \sigma_r)$$

$$45 = \frac{1}{2}(\sigma_h + 40)$$

$$\therefore \sigma_h = 50N/mm^2$$

واضح أنَّ التصميم يتم على إجهاد الشد الأقصى لا على إجهاد القص الأقصى لأنَّ الأول هو العامل الحاسم إذ يؤدي إلي إجهاد محيطي أكبر.

مثال(3):

الإجهاد الأقصى المسموح به في أسطوانة نصف قطرها الداخلي 80mm والخارجي 120mm إذا كان $20N/mm^2$ بينما الضغط الخارجي $6N/mm^2$. ما هو الضغط الداخلي الذي يمكن تسليطه. أرسم مخطَّط توزيع الإجهاد المحيطي والإجهاد القطري عبر سمك الأسطوانة.

الحل:

$$\sigma_r = a - \frac{b}{r^2}$$

$$r = 80mm, \quad \sigma_r = -P$$

$$r = 120mm, \quad \sigma_r = -6N/mm^2$$

$$\therefore -P = a - \frac{b}{80^2} \qquad (1)$$

$$\therefore -6 = a - \frac{b}{120^2} \qquad (2)$$

$$\sigma_h = a + \frac{b}{r^2}$$

$$r = 80mm, \quad \sigma_h = 20N/mm^2$$

$$\therefore 20 = a + \frac{b}{80^2} \qquad (2)$$

$$(2)-(3) \qquad \therefore b = 115.2.10^3$$

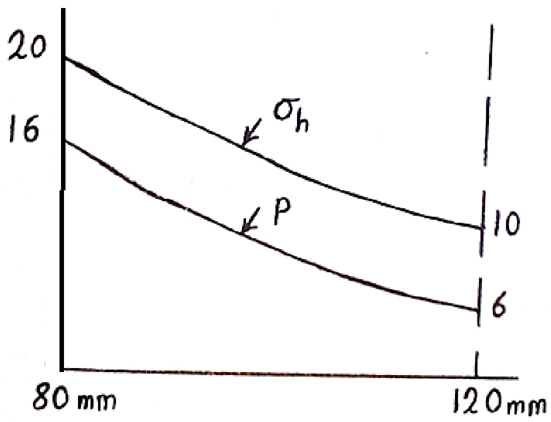
عوِّض في المعادلة (2)، $\therefore a = 2$

عوِّض في المعادلة (1)، $P = 16N/mm^2$

الإجهاد المحيطي على السطح الخارجي،

$$\sigma_h = 2 + \frac{115.2.10^3}{120^2}$$

$$\therefore \sigma_h = 10N/mm^2$$



الرسم(4.2)

مثال(4):

مقياسا إنفعال تم تثبيتهما على السطح الخارجي لأسطوانة وذلك لقياس الانفعالين الطولي والمحيطي. الأسطوانة مغلقة الطرفين وقطرها الداخلي والخارجي 150mm و200mm على التوالي. تحت تأثير ضغط داخلي معين كانت القراءات تشير إلي أنَّ الإجهاد الطولي والمحيطي $36N/mm^2$ و$72N/mm^2$ على التوالي وكلاهما إجهاد شد. أوجد (أ) الضغط الداخلي (ب)الإجهاد المحيطي على السطح الداخلي (ج) التغير في السطح الداخلي نتيجة الضغط. $E=206kN/mm^2$، $\nu = 0.28$.

الحل:

(أ) إذا كان الضغط الداخلي P والإجهاد الطولي σ_L والقطرين الداخلي والخارجي d_1 وd_2 فإنَّ،

$$\sigma_L\left(d_2^2-d_1^2\right)=Pd_1^2$$

$$36\left(200^2-150^2\right)=P\times150^2$$

$$\therefore P=28N/mm^2$$

(ب) الإجهاد المحيطي على السطح الداخلي،

$$\sigma_r=a-\frac{b}{r^2}$$

$$\sigma_h=a+\frac{b}{r^2}$$

$$\sigma_r-\sigma_h=2a$$

عند السطح الخارجي، $\sigma_r=0,\quad \sigma_h=72N/mm$

إذن، $\sigma_r+\sigma_h=72$

عند السطح الداخلي، $\sigma_r=-28N/mm^2$

$$\therefore -28+\sigma_h=72$$

$$\sigma_h=100N/mm^2$$

(ج) الانفعال المحيطي:

$$\in_h=\frac{\sigma_h}{E}-\nu\frac{\sigma_r}{E}-\nu\frac{\sigma_L}{E}$$

$$\in_h=\frac{1}{206.10^3}\left[100-0.28(-28+36)\right]=475.10^{-6}$$

الزيادة في القطر الداخلي = والزيادة في المحيط الداخلي

$$\Delta d_1=\in_h d_1$$

$$=475.10^{-6}\times150=0.0712mm$$

مثال(5):

أنبوب مركَّب يتكون من أنبوبين أحدهما فوق الآخر. القطر الوسيط 60mm. سماح الانكماش

(محسوب القطر) 0.01mm، كل أنبوب سمكه 10mm. إذا كان كلا الأنبوبين مصنوع من الصلب ($E = 200kN/mm^2$)، أحسب الإجهاد بين الأنبوبين. أحسب مخطَّط توزيع الإجهاد المحيطي عبر الجدار الناجم من:

(أ) الإنكماش (ب) ضغط داخلي $60N/mm^2$

وضِّح أيضاً ناتج توزيع الإجهاد المحيطي.

الحل:

أولاً: الإجهادات الناجمة من الانكماش: الأنبوب الداخلي،

$$\sigma_r = a - \frac{b}{r^2}$$

$$r = 20mm, \quad \sigma_r = 0$$

$$r = 30mm, \quad \sigma_r = -P_o$$

$$\therefore 0 = a - \frac{b}{20^2} \qquad (1)$$

$$\therefore -P_o = a - \frac{b}{30^2} \qquad (2)$$

من المعادلتين (1) و(2) نحصل على،

$$a = -1.9P_o, \qquad b = -720P_o$$

الأنبوب الخارجي،

$$r = 30mm, \quad \sigma_r = -P_o$$

$$r = 40mm, \quad \sigma_r = 0$$

$$\therefore -P_o = a' - \frac{b'}{30^2} \qquad (3)$$

$$0 = a' - \frac{b'}{30^2} \qquad (4)$$

$$a' = 1.286P_o, \qquad b' = 2057P_o$$

الإجهاد المحيطي،

$$\sigma_h = a + \frac{b}{r^2}$$

الأنبوبة الداخلي،

$$\sigma_h = -1.8P_o + \frac{720P_o}{r^2}$$

$$r = 30mm, \quad \sigma_h = -2.6P_o$$

الأنبوب الخارجي،

$$\sigma_h = -1.286P_o + \frac{2057P_o}{r^2}$$

$$r = 30mm, \quad \sigma_h = 3.572P_o$$

يمكن استنتاج سماح الانكماش هكذا،

$$\Delta = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \sigma'_1)d$$

حيث أن σ_1 إجهاد الضغط على السطح الخارجي للأنبوب الداخلي σ'_1 إجهاد الشد على السطح الداخلي للأنبوب الخارجي و d القطر الوسيط.

$$\therefore \Delta = \frac{1}{200.10^3}(206P_o - 3.572P_o) \times 60 = 0.01$$

$$\therefore P_o = 5.4N/mm^2$$

ثانياً الإجهادات الناجمة من الضغط الداخلي:

الأنبوب المركب،

$$r = 20mm, \quad \sigma_r = -60N/mm^2$$

$$r = 40mm, \quad \sigma_r = 0$$

$$\sigma_r = a'' - \frac{b''}{r^2}$$

$$-60 = a'' - \frac{b''}{20^2} \qquad (5)$$

$$0 = a'' - \frac{b''}{40^2} \qquad (6)$$

من المعادلتين (5) و(5) نحصل على،

$$a'' = 20, \qquad b'' = 32000$$

$$\sigma_h = a'' + \frac{b''}{r^2} = 20 + \frac{32000}{r^2}$$

$$r = 20mm, \quad \sigma_h = 100N/mm^2$$

$$r = 30mm, \quad \sigma_h = 55.6N/mm^2$$

$$r = 40mm, \quad \sigma_h = 40N/mm^2$$

وإجهاد الانكماش كما يلي:

الأنبوب الداخلي،

$$\sigma_h = -9.72 - \frac{3888}{r^2}$$

$$r = 20mm, \quad \sigma_h = -19.4N/mm^2$$

$$r = 30mm, \quad \sigma_h = -14.0N/mm^2$$

الأنبوب الخارجي،

$$\sigma_h = 6.94 + \frac{11108}{r^2}$$

$$r = 30mm, \quad \sigma_h = 19.3N/mm^2$$

$$r = 40mm, \quad \sigma_h = 13.9N/mm^2$$

ثالثاً: ناتج الإجهادات،

الأنبوب الداخلي،

$$r = 20mm, \quad \sigma_h = 80.6N/mm^2$$

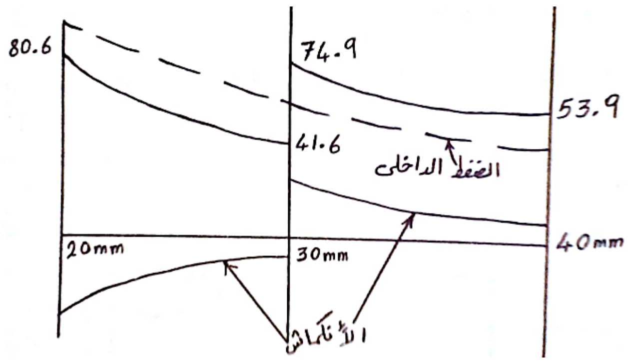
$$r = 30mm, \quad \sigma_h = 41.6 N/mm^2$$

الأنبوب الخارجي،

$$r = 30mm, \quad \sigma_h = 74.9 N/mm^2$$

$$r = 40mm, \quad \sigma_h = 53.9 N/mm^2$$

توزيع الإجهادات في المخطَّط الرسم (4.3) أدناه. حاول أن تُبيِّن القيم الرئيسة في المخطَّط والتي لم تظهر.



الرسم(4.3)

مثال(6):

قميص من الصلب طوله 120mm وقطره الخارجي 120mm تم كبسه على عمود من الصلب قطره 80mm بحيث كان الإجهاد المحيطي الأقصى في القميص $130N/mm^2$. أوجد الضغط الناجم على السطح المشترك. أرسم مخطَّط توزيع الإجهادات القطرية والمحيطية في جدار القميص.

الحل:

(أ) العمود:

$$\sigma_h = -\sigma_r = P_o$$

(ب) القميص:

$$\sigma_r = a - \frac{b}{r^2}$$

$$r = 40mm, \quad \sigma_r = -P_o$$

$$r = 60mm, \quad \sigma_h = 0$$

$$\therefore -P_o = a - \frac{b}{40^2} \qquad (1)$$

$$0 = a - \frac{b}{60^2} \qquad (2)$$

من المعادلتين (1) و(2) نحصل على،

$$a = 0.8P_o, \quad b = 2880P_o$$

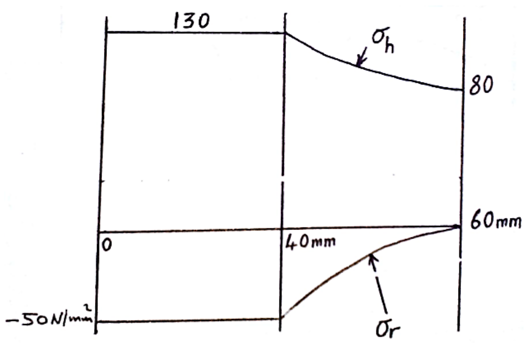
$$\sigma_h = a - \frac{b}{r^2} = 0.8P_o + \frac{2880P_2}{r^2}$$

$$r = 40mm, \quad \sigma_h = 130N/mm^2$$

$$\therefore 130 = 0.8P_o + \frac{2880P_o}{40^2}$$

$$\therefore P_o = 50N/mm^2$$

$$r = 60mm, \quad \sigma_h = 80N/mm^2$$



الرسم(4.4)

4.3 تمرين:

1. أسطوانة سميكة معرَّضة لضغط داخلي $60N/mm^2$ وإجهاد شد محيطي على السطح الداخلي $150N/mm^2$، أحسب الإجهاد المحيطي على السطح الخارجي وكذلك الطولي،

قطرا الأسطوانة 120mm و80mm.

Ans. (48N/mm^2, 96N/mm^2)

2. أحسب الضغط الداخلي المناسب في أسطوانة هيدروليك قطرها الداخلي 450mm وسمكها 250mm إذا كان الإجهاد المسموح به 15N/mm^2.

Ans. (9.5N/mm^2)

3. أسطوانة قطرها الداخلي 150mm والخارجي 200mm مفتوحة من الجانبين ومعرَّضة لضغط خارجي 14N/mm^2. أحسب إجهاد الضغط المحيطي الأقصى وتقلص قطري الأسطوانة الخارجي والداخلي E = 200kN/mm^2 ، $\nu = 0.28$.

Ans. (0.046mm, 0.048mm, 64N/mm^2)

4. أنبوب مركَّب قطره الداخلي 150mm والخارجي 250mm، تم عمله بكبس أنبوب على الآخر من نفس المادة وكان القطر الوسيط 200mm. إذا كان سماح الانكماش 0.05mm أحسب الضغط القطري بين الأنبوبين عند القطر المشترك. E= 200N/mm^2

أوجد أيضاً الإجهاد المحيطي الأقصى والأدنى في كلا الأنبوبين الناجم من الانكماش. إذا تعرَّض الأنبوب إلي ضغط داخلي 70N/mm^2، فكم تكون الإجهادات على السطحين الداخلي والخارجي لكل أنبوب؟ أرسم مخطَّط يوضِّح توزيع الإجهادات المحيطية قبل تسليط الحمل الداخلي وبعده.

الإجابة: الإجهاد N/mm^2

	الأنبوب الداخلي		الأنبوب الخارجي	
	75mm	100mm	100mm	125mm
الانكماش	−28.1	−22	28	21.9
الضغط	148.8	100.9	100.9	78.8
الناتج	120.7	78.9	128.9	100.7

5. أحسب التغير في قطر عمود مصمت قطره 100mm معرَّض لضغط $80N/mm^2$. خذ $E = 200kN/mm^2$ ، $\nu = 0.28$.

Ans. (0.0288)

6. قميص نحاس قطره الخارجي 60mm تم كبسه على عمود صلب قطره 40mm قطر القميص الداخلي كان أصغر من قطر العمود قبل كبسه وكان الفرق بينهما 0.05mm.

أوجد:

(أ) الضغط بين العمود والقميص.

(ب) الإجهاد المحيطي الأقصى في القميص.

(ج) التغير في القطر الخارجي للقميص.

للصلب $E = 200kN/mm^2$ ، $\nu = 0.29$.

للنحاس $E = 120kN/mm^2$ ، $\nu = 0.34$.

Ans. (+0.0214mm, $115.8N/mm^2$, $44.6N/mm^2$)

الكتب والمراجع

الكتب والمراجع العربية:

1. بروفيسور محمود يس عثمان ، "مذكرة محاضرات في متانة المواد المجلد الأول " ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، (1978م).

2. بروفيسور محمود يس عثمان ، "مذكرة محاضرات في متانة المواد المجلد الثاني " ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، (1982م).

3. بروفيسور محمود يس عثمان ، "مذكرة محاضرات في متانة المواد المجلد الثالث " ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، (1990م).

4. د. أسامة محمد المرضي سليمان ، "محاضرات في متانة المواد " ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، (1995م).

5. د. أسامة محمد المرضي سليمان ، "محاضرات في أساسيات المرونة واللدونة " ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، (1998م).

5. د. أسامة محمد المرضي سليمان ، "محاضرات في ميكانيكا المواد الأجزاء 1 ، 2 ، 3 " ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، (1995م).

الكتب والمراجع الإنجليزية:

1. William A. Nash and C.E.N Sturgess, "Strength of Materials", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Company, New York, 1997.
2. Urry S. A. and Turner P.J., "Solving Problems in Solid Mechanics", Vol2, Longman Scientific & Technical, UK, 1986.
3. James M. Gere and Stephen P. Timoshenko, "Mechanics of Materials", Van Nostrand Rienholds, UK, 1987.
4. Ryder, "Strength of Materials" , 1969.

المصطلحات

Axis	محور
Axial load	حمل محوري
Area	مساحة
Angle	زاوية
Applied load	حمل مسلط
Bar	قضيب
Brittle material	مادة قصفة
Bending moment	عزم انحناء
Bending stress	إجهاد انحناء
Brass	نحاس
Build-in beam	عارضة مبنية
Buckling	انبعاج
Complementary	تكميلي
Complementary shear stress	اجهاد قص تكميلي
Centre	مركز
Centre of area	مركز مساحة
Channel – section	مقطع على شكل مجري
Concentrated load	حمل مركَّز
Concentrated bending moment	عزم انحناء مركَّز

Cast iron	حديد زهر
Compression	ضغط
Cantilever beam	عارضة وتدية
Compound	مركب
Compound shaft	عمود مركب
Compound bar	قضيب مركب
Compound stress	إجهاد مركب
Compound strain	انفعال مركب
Compatibility	توافق
Copper	نحاس
Coefficient	معامل
Coefficient of expansion	معامل التمدَّد
Concentric	متمركز
Deformation	تشوه
Ductile material	مادة مطيلية
Diagram	مخطَّط
Distributed	موزع
Diameter	قطر
Deflection	انحراف
Elasticity	مرونة

Elastic limit	حد المرونة
Element	عنصر
Equilibrium	توازن
Force	قوة
Failure	انهيار
First moment of area	العزم الأول للمساحة
Flange	شفة
Frame	هيكل
Failure criteria	معايير الانهيار
Gap	فجوة
Hook's law	قانون هوك
I – section	مقطع I
Isentropic material	مادة متشابهة الخواص
Length	طول
Longitudinal stress	اجهاد طولي
Material	مادة
Mechanics of materials	ميكانيكا المواد
Modulus	معاير
Modulus of elasticity	معاير المرونة
Modulus of rigidity	معاير الجساءة

Maximum stress	الاجهاد الأقصى
Mohr's law	دائرة مور
Neutral axis	محور التعادل
Normal	عمودي
Nut	صامولة
Oblique plane	مستوى مائل
Proportional limit	حد التناسب
Plasticity	اللدونة
Parallel axis theorem	نظرية المحاور المتوازية
Perpendicular axis theorem	نظرية المحاور المتعامدة
Plane	مستوى
Propped cantilever	عارضة وتدية مدعومة
Polar moment of area	العزم القطبي للمساحة
Point of contra flexure (inflexion)	نقطة الانقلاب
Pulley	بكرة
Propeller shaft	عمود دفع
Power	قدرة
Principal stress	إجهاد رئيس
Principal strain	انفعال رئيس
Principal plane	مستوي رئيس

Pin-hinge	مفصلة مسمارية
Rigid bar	عمود جائسئ
Rail	سكة حديد
Radius of curvature	نصف قطر التقويسة
Stress	إجهاد
Strain	انفعال
Steel (mild)	صلب (طري)
Shear stress	إجهاد قص
Shear force	قوة قص
Section	مقطع
Symmetry	تماثل
Second moment of area	العزم الثاني للمساحة
Shear center	مركز القص
Speed	سرعة
Solid (shaft)	مصمت (عمود)
Strain gauge	مقياس انفعال
Strain energy	طاقة انفعال
Shear strain energy	طاقة انفعال القص
Slope	ميل
Sleeve	جلبة – قميص

T – section	مقطع على شكل T
Torsion	إلتواء
Tension	شد
Twisting moment	عزم إلتواء
Torque	عزم إلتواء
Thermal stresses	إجهادات حرارية
Temperature	درجة حرارة
Theories of failure	نظريات الانهيار
Tube	أنبوب
Uniform distributed load	حمل موزع بانتظام
Web	وترة
Work	شغل
Working stress	إجهاد تشغيل
Washer	وردة
Yield	خضوع
Yield stress	إجهاد خضوع